

Számítógépes Grafika

11. előadás: parametrikus és felosztott felületek

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

Tartalom

- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - Face-split algoritmusok
 - Catmull-Clark felosztás
 - Vertex-split algoritmusok
 - Doo-Sabin felosztás

Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- Polinomiális tenzorszorzat felületek
- Bézier felület
- Spline felületek
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Felületek megadása

A felületeket a görbékhez hasonlóan ponthalmazokként definiáljuk.

A megadási módok a szokásosak:

- Explicit: $z = f(x, y)$

Felületek megadása

A felületeket a görbékhez hasonlóan ponthalmazokként definiáljuk.
A megadási módok a szokásosak:

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$

Felületek megadása

A felületeket a görbékhez hasonlóan ponthalmazokként definiáljuk.

A megadási módok a szokásosak:

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0$

Felületek megadása

A felületeket a görbékhez hasonlóan ponthalmazokként definiáljuk.

A megadási módok a szokásosak:

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$

Felületek megadása

A felületeket a görbékhez hasonlóan ponthalmazokként definiáljuk.

A megadási módok a szokásosak:

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$, ahol általában
 $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$

Felületek megadása

A felületeket a görbékhez hasonlóan ponthalmazokként definiáljuk.

A megadási módok a szokásosak:

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$, ahol általában
 $(u, v) \in [a, b] \times [c, d] \rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_p \subset \mathbb{R}^2\}$

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősíknormálvektora (síkra merőleges vektor)

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintő sík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egység hosszú vektort szoktunk felírni

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősíknormálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egység hosszú vektort szoktunk felírni
- A különböző felírásokban a (nem egység hosszú) felületi normális:

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egység hosszú vektort szoktunk felírni
- A különböző felírásokban a (nem egység hosszú) felületi normális:

- implicit:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Felületi normális

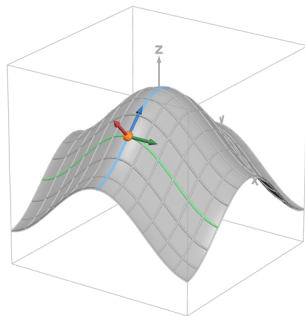
- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egység hosszú vektort szoktunk felírni
- A különböző felírásokban a (nem egység hosszú) felületi normális:

- implicit:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

- parametrikus:

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)$$



Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- Polinomiális tenzorszorzat felületek
- Bézier felület
- Spline felületek
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$

Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$
- Keresünk egy egyszerű parametrikus felületet $[0, 1] \times [0, 1]$ felett, ami a sarokpontokban interpolálja a fenti négy pontot

Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$
- Keresünk egy egyszerű parametrikus felületet $[0, 1] \times [0, 1]$ felett, ami a sarokpontokban interpolálja a fenti négy pontot
- Három lineáris interpolációval egy egyszerű felületet kapunk:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s, t) = & (1 - t)((1 - s)\mathbf{p}_1 + s\mathbf{p}_3) \\ & + t((1 - s)\mathbf{p}_2 + s\mathbf{p}_4)\end{aligned}$$

ahol $s, t \in [0, 1]$.

Bilineáris felület

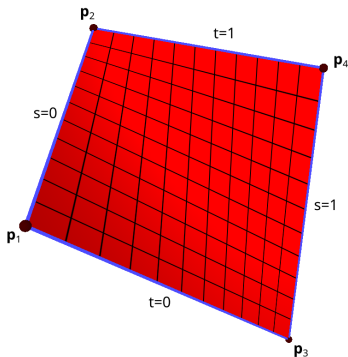
- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$
- Keresünk egy egyszerű parametrikus felületet $[0, 1] \times [0, 1]$ felett, ami a sarokpontokban interpolálja a fenti négy pontot
- Három lineáris interpolációval egy egyszerű felületet kapunk:

$$\mathbf{b}(s, t) = (1 - t)((1 - s)\mathbf{p}_1 + s\mathbf{p}_3) \\ + t((1 - s)\mathbf{p}_2 + s\mathbf{p}_4)$$

ahol $s, t \in [0, 1]$.

- Lényegében: két szakaszt „írtunk be” a t szerinti lineáris interpoláció képletébe

Bilineáris felület



- A szélei ($s = 0$, $t = 0$, $s = 1$, $t = 1$ paraméterekkel) egyenes szakaszok.
- A fekete rács is egyenes szakaszokból áll, ahol $s = \text{konstans}$ vagy $t = \text{konstans}$.
- Viszont, ha a négy csúcs nincs egy síkban, akkor a felület sem sík!

Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- Polinomiális tenzorszorzat felületek
- Bézier felület
- Spline felületek
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Görbék mátrix alakja

- Egy n -edfokú polinom görbe parametrikus alakja a hatványbázisban $\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \cdot u^i, u \in \mathbb{R}$

Görbék mátrix alakja

- Egy n -edfokú polinom görbe parametrikus alakja a hatványbázisban $\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \cdot u^i$, $u \in \mathbb{R}$
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, n$

Görbék mátrix alakja

- Egy n -edfokú polinom görbe parametrikus alakja a hatványbázisban $\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \cdot u^i$, $u \in \mathbb{R}$
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, n$
- A fenti egyszerűen felírható mátrix alakban is, például harmadfokú egész polinom esetén

$$\mathbf{r}(u) = \underbrace{[u^3, u^2, u, 1]}_{\mathbf{u}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

Görbék mátrix alakja – példa

- Az $y = x^2$ parabola parametrikus alakja hatványbázisban

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Görbék mátrix alakja – példa

- Az $y = x^2$ parabola parametrikus alakja hatványbázisban

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- Mátrix alakja pedig

$$\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Görbék mátrix alakja más bázisban

- Amennyiben ismert egy, a hatványbázisból egy másik bázisba vivő $\mathbf{M}$ transzformációs mátrix, akkor az új bázisbeli $\mathbf{G}$ görbekoordinátákkal a következő alakú a görbe:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}}_{\mathbf{A}}$$

Görbék mátrix alakja más bázisban

- Amennyiben ismert egy, a hatványbázisból egy másik bázisba vivő $\mathbf{M}$ transzformációs mátrix, akkor az új bázisbeli $\mathbf{G}$ görbekoordinátákkal a következő alakú a görbe:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}}_{\mathbf{A}}$$

- Itt $\mathbf{u}^T \mathbf{M}$ eredménye a másik bázis, a $\mathbf{G}$ -ben pedig a neki megfelelő adatok vannak a görbéről (pl. Bernstein bázis esetén a Bézier vezérlőpontokból áll a $\mathbf{G}$).

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Például a másodfokú Bernstein bázispolinomok

$$B_0^2(u) = (1 - u)^2 = u^2 - 2u + 1$$

$$B_1^2(u) = 2(1 - u)u = -2u^2 + 2u$$

$$B_2^2(u) = u^2$$

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Például a másodfokú Bernstein bázispolinomok

$$B_0^2(u) = (1 - u)^2 = u^2 - 2u + 1$$

$$B_1^2(u) = 2(1 - u)u = -2u^2 + 2u$$

$$B_2^2(u) = u^2$$

- Így a hatványbázisból a Bernstein bázisba vivő transzformációs mátrix alakja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Ekkor tehát a másik bázis a képletünkből

$$[u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B_2^2(u), B_1^2(u), B_0^2(u)]$$

tehát a **G**-ben a Bézier-kontrollpontokat **b₂**, **b₁**, **b₀** sorrendben kell eltárolni

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Ekkor tehát a másik bázis a képletünkből

$$[u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B_2^2(u), B_1^2(u), B_0^2(u)]$$

tehát a **G**-ben a Bézier-kontrollpontokat **b₂**, **b₁**, **b₀** sorrendben kell eltárolni

- A görbénk alakja ekkor

$$\mathbf{r}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix}$$

*Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- A harmadfokú Hermite görbe

$\mathbf{r}(u) = H_0^3(u)\mathbf{r}_0 + H_3^3(u)\mathbf{r}_1 + H_1^3(u)\mathbf{t}_0 + H_2^3(u)\mathbf{t}_1$ bázisára

$$H_0^3(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1, \quad H_1^3(u) = u^3 - 2u^2 + u$$

$$H_2^3(u) = u^3 - u^2, \quad H_3^3(u) = -2u^3 + 3u^2$$

*Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- A harmadfokú Hermite görbe

$\mathbf{r}(u) = H_0^3(u)\mathbf{r}_0 + H_3^3(u)\mathbf{r}_1 + H_1^3(u)\mathbf{t}_0 + H_2^3(u)\mathbf{t}_1$ bázisára

$$H_0^3(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1, \quad H_1^3(u) = u^3 - 2u^2 + u$$

$$H_2^3(u) = u^3 - u^2, \quad H_3^3(u) = -2u^3 + 3u^2$$

- Ezért a harmadfokú Hermite görbe mátrix alakja a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u) &= [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} \\ &= [H_0^3(u), H_3^3(u), H_1^3(u), H_2^3(u)] \cdot G = \mathbf{h}^T(u) \cdot G\end{aligned}$$

Báziskonverziók

- Amennyiben ismert egy $\mathbf{u}^T \mathbf{M}_1$ bázisban a görbénk $\mathbf{G}_1$ geometriai adatait tartalmazó tömb és ki akarjuk számítani, hogy $\mathbf{u}^T \mathbf{M}_2$ bázisban mik lesznek a görbénk $\mathbf{G}_2$ koordinátái, akkor megoldandó

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{G}_1 = \mathbf{u}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{G}_2$$

egyenletrendszer az ismeretlen együtthatókra $\mathbf{G}_2$ -ből

Báziskonverziók

- Amennyiben ismert egy $\mathbf{u}^T \mathbf{M}_1$ bázisban a görbénk $\mathbf{G}_1$ geometriai adatait tartalmazó tömb és ki akarjuk számítani, hogy $\mathbf{u}^T \mathbf{M}_2$ bázisban mik lesznek a görbénk $\mathbf{G}_2$ koordinátái, akkor megoldandó

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{G}_1 = \mathbf{u}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{G}_2$$

egyenletrendszer az ismeretlen együtthatókra $\mathbf{G}_2$ -ből

- Ebből a megoldásra adódik, hogy

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{G}_1$$

Báziskonverziók – példa

- Legyen adott az előbb látott parabola $\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$ alakja, ahol $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ feletti részét fel akarjuk írni Bézier vezérlőpontokkal

Báziskonverziók – példa

- Legyen adott az előbb látott parabola $\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$ alakja, ahol $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ feletti részét fel akarjuk írni Bézier vezérlőpontokkal
- Kellenek tehát a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^3$ Bézier vezérlőpontok

Báziskonverziók – példa

- Legyen adott az előbb látott parabola $\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$ alakja, ahol $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ feletti részét fel akarjuk írni Bézier vezérlőpontokkal
- Kellenek tehát a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^3$ Bézier vezérlőpontok
- Megoldandó

$$[u^2, u, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} = [u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix}$$

Báziskonverziók – példa

- Azaz a Bézier vezérlőpontokra adódik

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$$

Báziskonverziók – példa

- Így a keresett vezérlőpontok a következők:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Báziskonverziók – példa

- Így a keresett vezérlőpontok a következők:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ell.: a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ tényleg pontok (pont + vektor)

Báziskonverziók – példa

- Így a keresett vezérlőpontok a következők:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ell.: a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ tényleg pontok (pont + vektor)
- HF: kiszámolni a parabola $[-2, 2]$ feletti darabjának Bézier kontrollpontjait!

Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- **Polinomiális tenzorszorzat felületek**
- Bézier felület
- Spline felületek
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Felületek mátrix alakja

- Egy polinomiális felület parametrikus alakja a hatványbázisban
$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} u^i v^j, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Felületek mátrix alakja

- Egy polinomiális felület parametrikus alakja a hatványbázisban
$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} u^i v^j, \quad u, v \in \mathbb{R}$$
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_{00} \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}^3, (ij) \neq (00)$

Felületek mátrix alakja

- Egy polinomiális felület parametrikus alakja a hatványbázisban
 $\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} u^i v^j, \quad u, v \in \mathbb{R}$
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_{00} \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}^3, (ij) \neq (00)$
- Mindkét paraméterirányban harmadfokú felületek esetén ez

$$\mathbf{r}(u, v) = \underbrace{[u^3, u^2, u, 1]}_{\mathbf{u}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{30} \\ \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{20} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{03} & \mathbf{a}_{02} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{00} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$$

Felületek más bázisban

- A görbénél látottakhoz hasonlóan, általános bázisban felírva egy felület mátrix alakját, a következő adódik:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{v} ,$$

ahol az $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ az m és n -edfokú hatvány $\rightarrow$ általános bázis konverziós mátrixok

Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- Polinomiális tenzorszorzat felületek
- Bézier felület
- Spline felületek
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

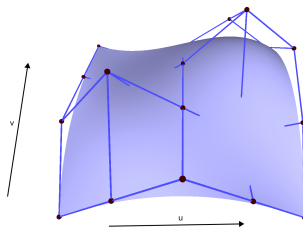
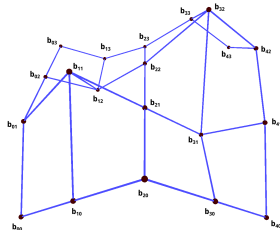
- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Bézier felület

- A $\mathbf{b}_{ij} \in \mathbb{E}^3$, $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$ kontrollpoligon által meghatározott $n \times m$ -edfokú Bézier-felület

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{b}_{ij}$$

alakú, ahol $u, v \in [0, 1]$.



*Bézier felület – deriváltak

- A görbénél látottakat felhasználva az u paraméterirányban:

$$\begin{aligned}\partial_u \mathbf{b}(u, v) &= \sum_{j=0}^m \partial_u \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{b}_{ij} \right) B_j^m(v) \\ &= n \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v)\end{aligned}$$

ahol $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$

*Bézier felület – deriváltak

- Ugyanez v szerint

$$\partial_v \mathbf{b}(u, v) = m \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v)$$

ahol $\Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$

*Bézier felület – deriváltak

- Egy adott felületi pontban a parciális deriváltak által kifeszített síkot *érintősíknak* nevezzük

*Bézier felület – deriváltak

- Egy adott felületi pontban a parciális deriváltak által kifeszített síkot *érintősíknak* nevezzük
- Ennek normálisa – és egyúttal a felületünk normálisa az adott paraméterértékekhez tartozó pontban – pedig $[\partial_u \mathbf{p} \times \partial_v \mathbf{p}]_0$, ami a sarokpontokban szépen felírható a vezérlőpontokkal

*Bézier felület – deriváltak

A görbéknél látottakat felhasználva a deriváltak általánosan a következőképpen néznek ki:

$$\partial_{u^r, v^s} \mathbf{b}(u, v) = \frac{m!n!}{(n-r)!(m-s)!} \sum_{j=0}^{m-s} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{ij} B_i^{n-r}(u) B_j^{m-s}(v)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Delta^{i,j} \mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{i-1,j} \mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{i-1,j} \mathbf{b}_{i,j} \\ &= \Delta^{i,j-1} \mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{i,j-1} \mathbf{b}_{i,j} \end{aligned}$$

Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- Polinomiális tenzorszorzat felületek
- Bézier felület
- **Spline felületek**
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Spline felület

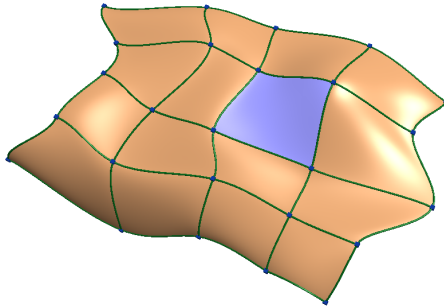
- Alacsonyabb fokszámú felületdarabokat, felületfoltokat (patch-eket) illesztünk egymáshoz

Spline felület

- Alacsonyabb fokszámú felületdarabokat, felületfoltokat (patch-eket) illesztünk egymáshoz
- Csatlakozások folytonosságára figyelni kell

Spline felület

- Alacsonyabb fokszerű felületdarabokat, felületfoltokat (patch-eket) illesztünk egymáshoz
- Csatlakozások folytonosságára figyelni kell
- Több erről: Geometriai Modellezés, Felület és Testmodellezés - MSc.



Tartalom

1 Parametrikus felületek

- Bilineáris felület
- Polinomiális görbék
- Polinomiális tenzorszorzat felületek
- Bézier felület
- Spline felületek
- Műveletek felületekkel

2 Subdivision felületek

- Motiváció
- Face-split algoritmusok
- Catmull-Clark felosztás
- Vertex-split algoritmusok
- Doo-Sabin felosztás

Metszés sugárral

- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel

Metszés sugárral

- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel
- Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldani:
 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}(u, v)$, ahol az ismeretlenek t, u, v (figyeljünk a megkötéseikre!)

Metszés sugárral

- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel
- Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldani:
 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}(u, v)$, ahol az ismeretlenek t, u, v (figyeljünk a megkötéseikre!)
- Többváltozós Newton és egyébek...

Metszés sugárral

- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel
- Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldani:
 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}(u, v)$, ahol az ismeretlenek t, u, v (figyeljünk a megkötéseikre!)
- Többváltozós Newton és egyebek...
- Ha csak megjeleníteni kell, akkor egyszerűbb raszterizálni (háromszögekkel tesszellelát felület)
- A metszés is közelíthető a mesh-el való metszéssel

Tartalom

- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - Face-split algoritmusok
 - Catmull-Clark felosztás
 - Vertex-split algoritmusok
 - Doo-Sabin felosztás

Tartalom

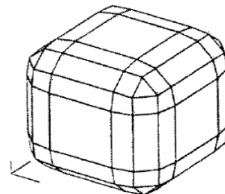
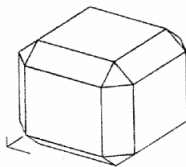
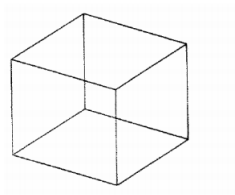
- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - Face-split algoritmusok
 - Catmull-Clark felosztás
 - Vertex-split algoritmusok
 - Doo-Sabin felosztás

Subdivision

SIGGRAPH Subdivision tutorial a téma iránt mélyebben
érdeklődőknek: [http:
//www.mrl.nyu.edu/publications/subdiv-course2000/](http://www.mrl.nyu.edu/publications/subdiv-course2000/)

Subdivision felületek – Doo-Sabin

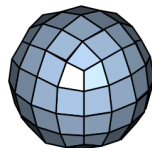
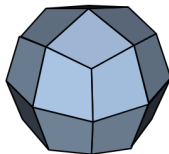
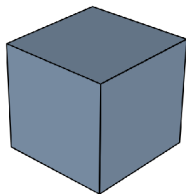
Vertex-split algoritmus



Subdivision felületek – Catmull-Clark

Face-split algoritmus

2001: Oscar Catmull-nak „for significant advancements to the field of motion picture rendering as exemplified in Pixar’s RenderMan”



Fogalmak – séma mesh-típusa

- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik

Fogalmak – séma mesh-típusa

- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik
- Amikor egy séma mesh-ének típusáról beszélünk erre az összémára gondolunk

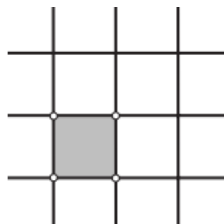
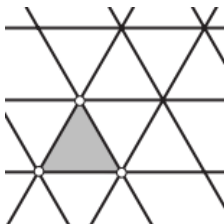
Fogalmak – séma mesh-típusa

- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik
- Amikor egy séma mesh-ének típusáról beszélünk erre az összémára gondolunk
- A síkban regulárisan elhelyezett pontokat szabályos háromszögekkel, négyzetekkel, vagy szabályos hatszögekkel fedhetjük le

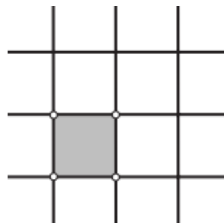
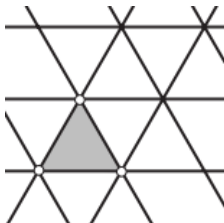
Fogalmak – séma mesh-típusa

- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik
- Amikor egy séma mesh-ének típusáról beszélünk erre az összémára gondolunk
- A síkban regulárisan elhelyezett pontokat szabályos háromszögekkel, négyzetekkel, vagy szabályos hatszögekkel fedhetjük le
- Ennek megfelelően nevezünk egy sémát *háromszög*-, *négyszög*- vagy *hatszög-alapúnak* (gyakorlatban utóbbi ritka)

Mesh-típus

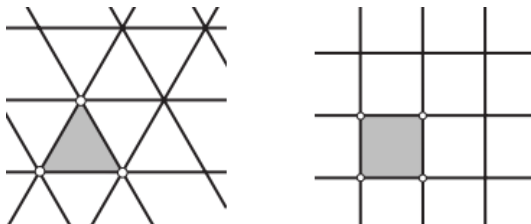


Mesh-típus



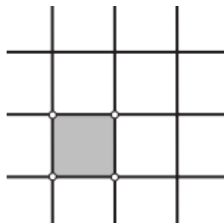
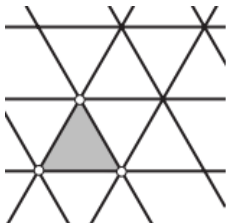
- Vigyázzunk: „szép” (teljes oldalakban illeszkedő), 6-reguláris háromszög vagy „szép”, 4-reguláris négyszöghálóval nem lehet bármit lefedni degenerált esetek nélkül!

Mesh-típus



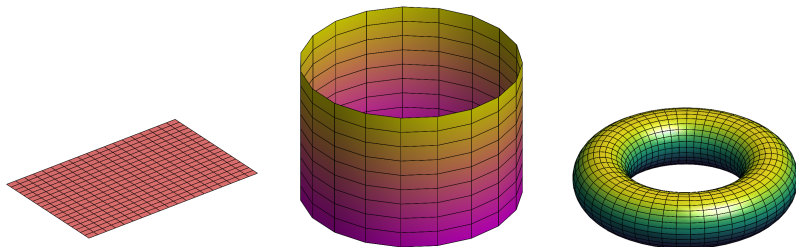
- Vigyázzunk: „szép” (teljes oldalakban illeszkedő), 6-reguláris háromszög vagy „szép”, 4-reguláris négyszöghálóval nem lehet bármit lefedni degenerált esetek nélkül!
- A fenti reguláris topológiákkal a végtelen síklap, vagy a végtelen hengerpalást, vagy pedig a tórusz topológiájának megfelelő felületek írhatóak le

Mesh-típus



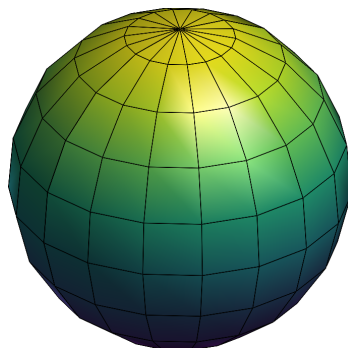
- Vigyázzunk: „szép” (teljes oldalakban illeszkedő), 6-reguláris háromszög vagy „szép”, 4-reguláris négyszöghálóval nem lehet bármit lefedni degenerált esetek nélkül!
- A fenti reguláris topológiákkal a végtelen síklap, vagy a végtelen hengerpalást, vagy pedig a tórusz topológiájának megfelelő felületek írhatóak le
- Nem fedhetők le például a gömb topológiájának megfelelő felületek

Négyszöghálós lefedés – Sík / henger / tórusz



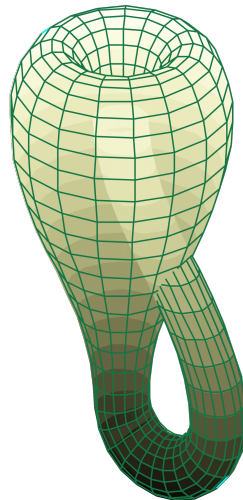
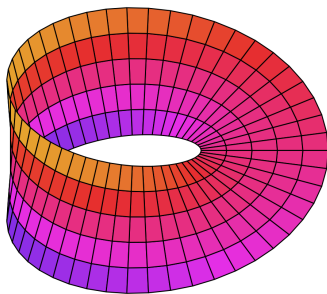
Ezek lefedhetők 4-reguláris négyszöghálóval

Négyszöghálós lefedés – Gömb



- A gömb nem fedhető le 4-reguláris hálóval (pl. a bal ábrán közepén látható egy harmadfokú csúcs, a jobb ábrán pedig fönt fölül degenerált négyszögek vannak amik egy csúcsban találkoznak).
- Ezeket hívjuk rendkívüli csúcsoknak (*extraordinary vertices*)

Négyszöghálós lefedés – Möbius-szalag / Klein-kanocsó



Tartalom

- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - **Face-split algoritmusok**
 - Catmull-Clark felosztás
 - Vertex-split algoritmusok
 - Doo-Sabin felosztás

Fogalmak – face-split (primál)

- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk

Fogalmak – face-split (primál)

- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk
- Az előző lépés mesh-ének csúcspontjait megőrizzük (de módosíthatjuk a pozíciójukat – ha változtatás nélkül vesszük át a pontokat, akkor interpoláló sémáról beszélünk)

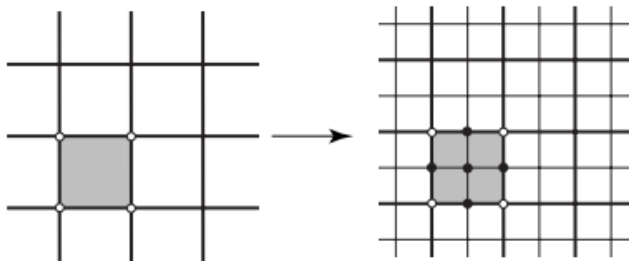
Fogalmak – face-split (primál)

- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk
- Az előző lépés mesh-ének csúcspontjait megőrizzük (de módosíthatjuk a pozíciójukat – ha változtatás nélkül vesszük át a pontokat, akkor interpoláló sémáról beszélünk)
- Új csúcspontokat szúrunk be minden élre (kettéosztva ezzel őket)

Fogalmak – face-split (primál)

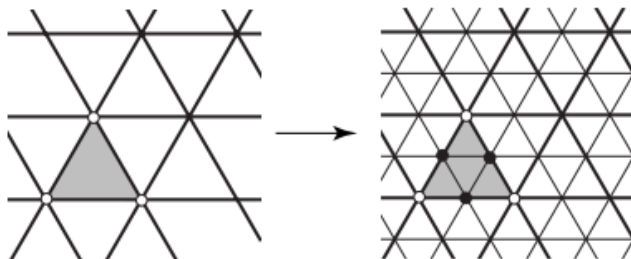
- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk
- Az előző lépés mesh-ének csúcspontjait megőrizzük (de módosíthatjuk a pozíciójukat – ha változtatás nélkül vesszük át a pontokat, akkor interpoláló sémáról beszélünk)
- Új csúcspontokat szúrunk be minden élre (kettéosztva ezzel őket)
- Négyszög alapú sémáknál a lapból is származtatunk egy új csúcspontot

Face-split 4-reguláris mesh-en



Face split for quads

Face-split 6-reguláris mesh-en



Face split for triangles

Fogalmak – face-split: páros és páratlan csúcsok

Páros csúcsok (*even vertices*):

- Laposztó (face-split) sémáknál a durvább felbontású mesh csúcspontjai, amelyek megfelelnek a finomabb mesh csúcspontjainak
- Az előző ábrákon fehérrel jelölt pontok

Fogalmak – face-split: páros és páratlan csúcsok

Páros csúcsok (*even vertices*):

- Laposztó (face-split) sémáknál a durvább felbontású mesh csúcspontjai, amelyek megfelelnek a finomabb mesh csúcspontjainak
- Az előző ábrákon fehérrel jelölt pontok

Páratlan csúcsok (*odd vertices*):

- Az újonnan létrejött csúcsok, amelyek nem feleltethetők meg a finomítás előtti szint egyetlen csúcspontjának sem
- Az előző ábrákon feketével jelölt pontok

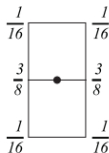
Tartalom

- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - Face-split algoritmusok
 - Catmull-Clark felosztás
 - Vertex-split algoritmusok
 - Doo-Sabin felosztás

Catmull-Clark



Mask for a face vertex



Mask for an edge vertex

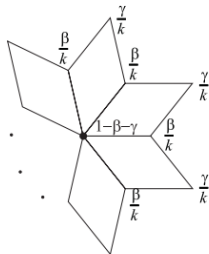


Mask for a boundary odd vertex

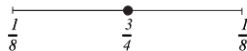
a. Masks for odd vertices

$$\beta = \frac{3}{2k}$$

$$\gamma = \frac{1}{4k}$$



Interior



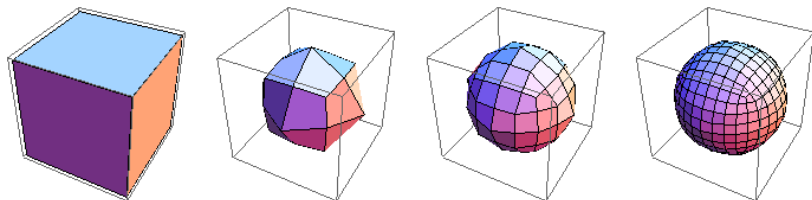
Crease and boundary

b. Mask for even vertices

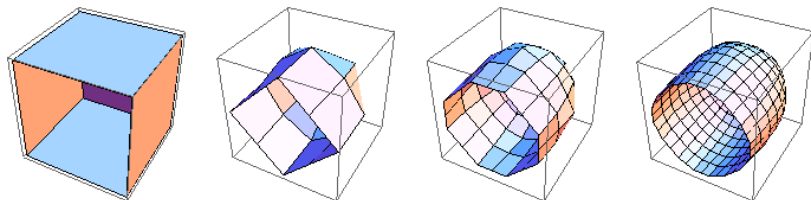
Catmull-Clark

- Face-split algoritmus, négyszöglapokból álló meshre definiált
- Az új csúcspozíciók a lapszomszédos csúcsok súlyozott átlagaként (baricentrikus kombináció) áll elő. A súlyok az előző ábrán láthatók a jelölt pontokra vonatkozóan.
- A lap közepén keletkező új pont egyszerűen a súlypontja a lap csúcsainak
- Egy élen keletkező új csúcs az eredeti él két végpontját $\frac{3}{8}$, a többi azonos lapon lévő csúcsot pedig $\frac{1}{16}$ súllyal számítja
- A páros pontoknál az új pozícióhoz az élszomszédos csúcsok nagyobb súllyal szerepelnek, a lapokon átlósan szomszédos súlyok pedig kisebb súllyal. Az ábrán jelölt k érték a csúcscsal szomszédos lapok száma.
- Kezelhető továbbá a mesh széle is (*boundary*), valamint azonos módon, ha egy éles élt szeretnénk hagyni a modellben (*crease*)

Catmull-Clark

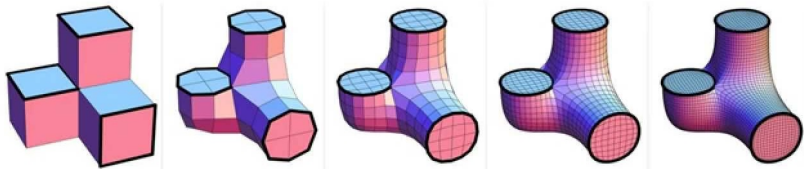


Catmull-Clark – boundary



Catmull-Clark – crease

Catmull-Clark with Sharp Creases



Tartalom

- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - Face-split algoritmusok
 - Catmull-Clark felosztás
 - **Vertex-split algoritmusok**
 - Doo-Sabin felosztás

Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén

Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén
- A régi lapból új lap származik közvetlenül

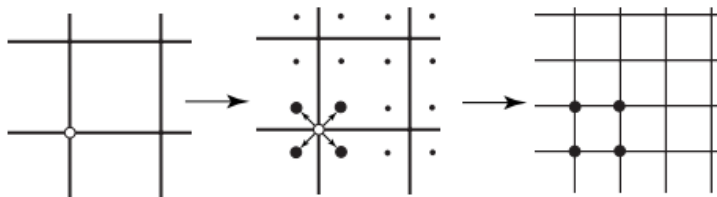
Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén
- A régi lapból új lap származik közvetlenül
- Az élek mentén új lapok születnek (az élek végpontjaiból az él által szétválasztott két lapra születő új csúcspontokat összekötve)

Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén
- A régi lapból új lap származik közvetlenül
- Az élek mentén új lapok születnek (az élek végpontjaiból az él által szétválasztott két lapra születő új csúcspontokat összekötve)
- A régi csúcspontok helyett egy új lap születik, a csúcsból született új csúcspontokkal

Vertex-split 4-reguláris mesh-en



Vertex split for quads

Összehasonlítás – face- és vertex-split

- Reguláris négyszöghálón mindkét esetben 4-reguláris lesz az új háló is $\rightarrow$ tartja a topológiát

Összehasonlítás – face- és vertex-split

- Reguláris négyszöghálón mindkét esetben 4-reguláris lesz az új háló is $\rightarrow$ tartja a topológiát
- Figyeljünk: reguláris háromszöghálóknál vertex-split után három-, négy- és hatszögeket is kapunk!

Tartalom

- 1 Parametrikus felületek
 - Bilineáris felület
 - Polinomiális görbék
 - Polinomiális tenzorszorzat felületek
 - Bézier felület
 - Spline felületek
 - Műveletek felületekkel
- 2 Subdivision felületek
 - Motiváció
 - Face-split algoritmusok
 - Catmull-Clark felosztás
 - Vertex-split algoritmusok
 - Doo-Sabin felosztás

Doo-Sabin

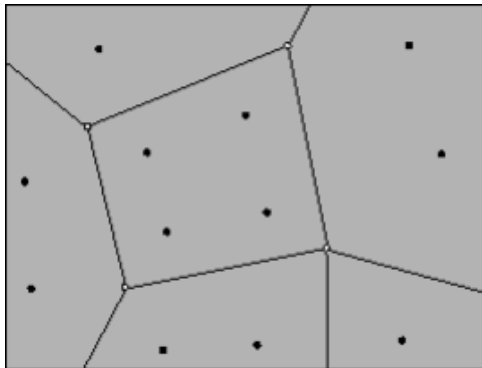
Eredeti cikk:

<https://web.archive.org/web/20110707175713/http://trac2.assembla.com/DooSabinSurfaces/export/12/trunk/docs/Doo%201978%20Subdivision%20algorithm.pdf>

Rövid leírás: <http://www.cs.unc.edu/~dm/UNC/COMP258/LECTURES/Doo-Sabin.pdf>



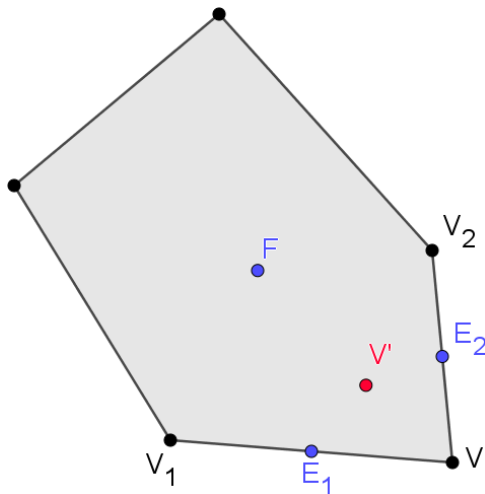
Doo-Sabin – Új pontok számítása



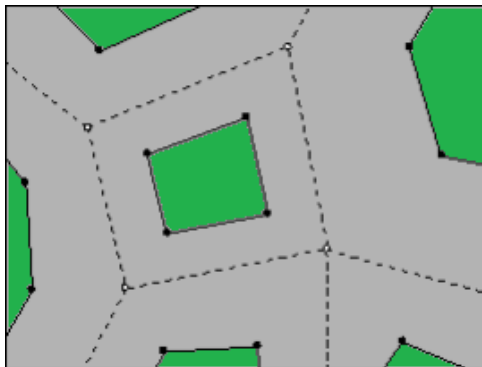
Doo-Sabin – Új pontok számítása

- Vertex-split algoritmus: minden lapon csúcsonként egy új csúcspontot számítunk ki.
- Legyen a kiválasztott csúcs $V \in \mathbb{E}^3$, a lapon két szomszédos csúcs V_1 és $V_2 \in \mathbb{E}^3$ és a lap csúcsainak súlypontja $F \in \mathbb{E}^3$
- Ekkor a két élpont $E_1 = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V_1$ és $E_2 = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V_2$
- Az új csúcspont pozíciója pedig $V' = \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}E_1 + \frac{1}{4}E_2 + \frac{1}{4}F$

Doo-Sabin

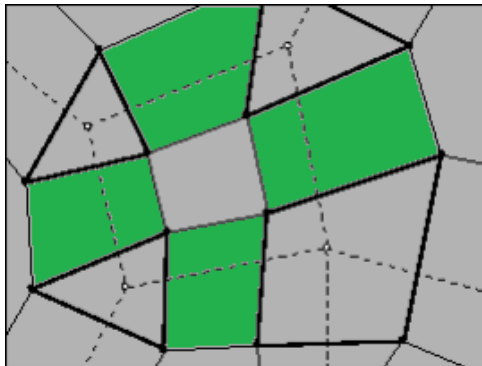


Doo-Sabin – Lapokból származó lapok



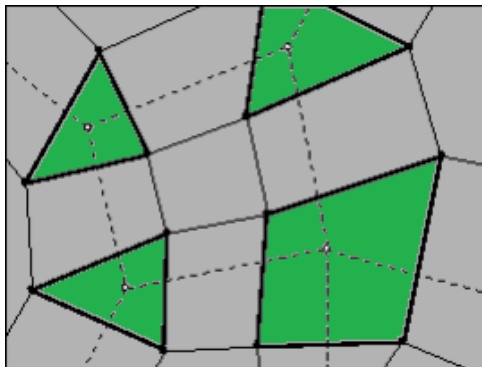
Az eredeti lappal megegyező oldalszám

Doo-Sabin – Élekből származó lapok



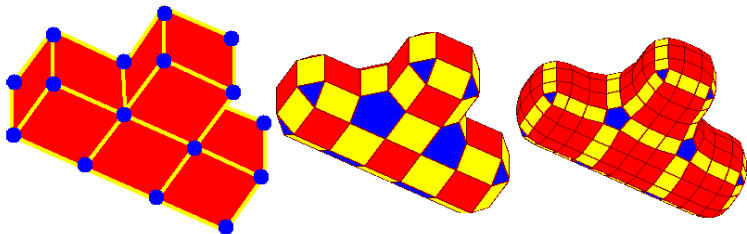
Mindig négyszög

Doo-Sabin – Csúcsokból származó lapok

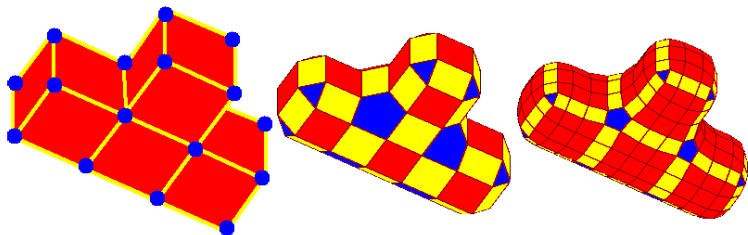


A csúcs szomszédaival megegyező oldalszámú

Doo-Sabin



Doo-Sabin



Vigyázzunk, a kialakuló sokszögek nem biztos, hogy síkbeliek!