

Számítógépes Grafika

5. előadás: sugármetszés

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

Tartalom

Raycasting

- Motiváció

- Raycasting

- Sugarak indítása

Metszések

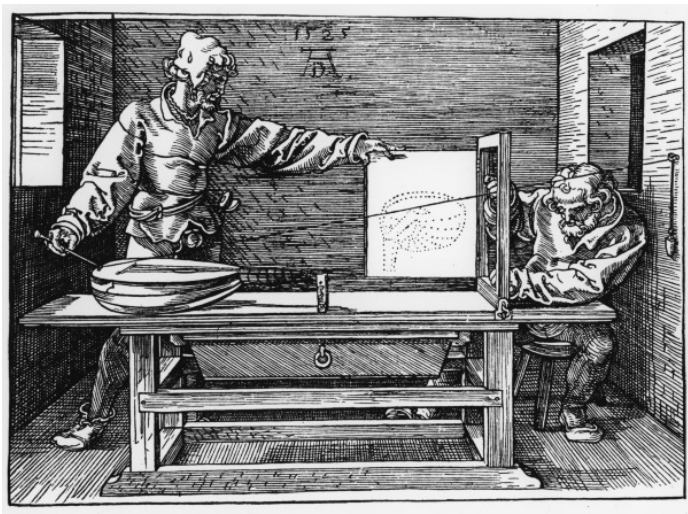
- Általánosan

- Sík

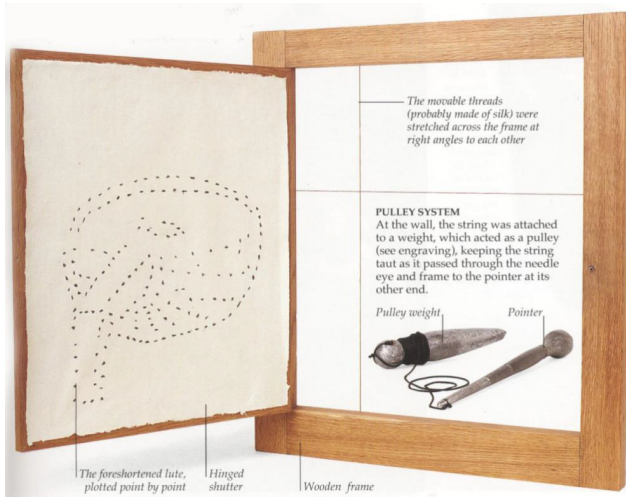
- Háromszög és sokszög

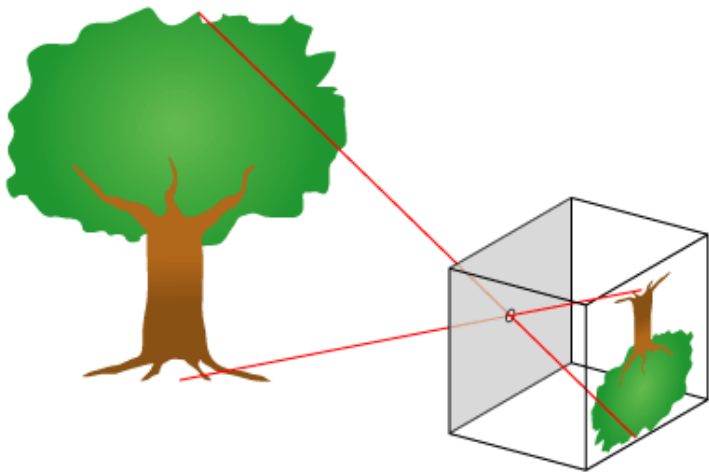
- Gömb

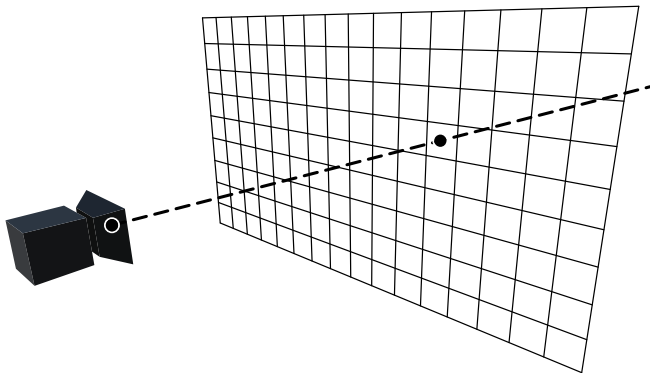
- Doboz



Albrecht Dürer, 1525







Motiváció

- ▶ Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- ▶ Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel? → Nézzük meg, mi látszik onnan a világból és az alapján rendeljünk hozzá a pixelhez egy színt!

Raycasting

Minden pixelre:

Indítsunk egy sugarat a színtérbe

Minden objektumra a színtérben:

Nézzük meg, hogy metszi-e a sugár az objektumot

A legközelebbi metszett objektum
színével színezzük ki a pixelt

Sugár

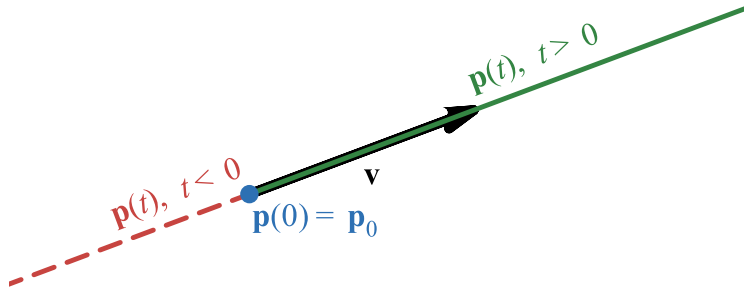
- ▶ A sugárnak van
 - ▶ egy $\mathbf{p}_0$ kiindulási pontja
 - ▶ és egy $\mathbf{v}$ iránya
- ▶ A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

ahol $t > 0$ (félegyenes!).

- ▶ $t = 0$?, $t < 0$? sugár kezdőpontja, sugár mögötti részek

Sugár



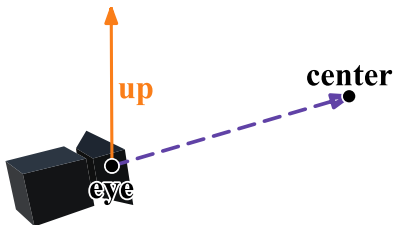
Kérdések

- ▶ Honnan indítsuk a sugarat?
- ▶ Milyen irányba küldjük a sugarat?
- ▶ Hogyan metsszük el a sugarat akármivel?

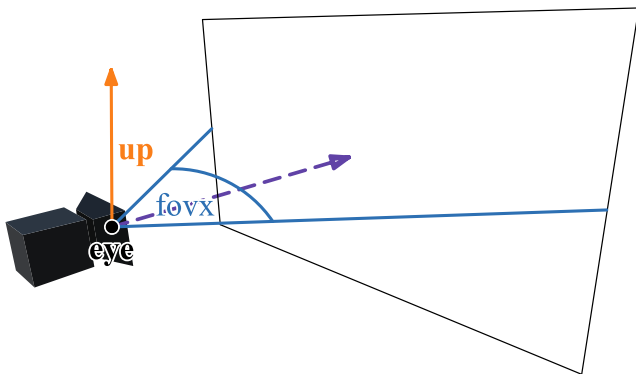
Sugarak indítása – Kameratulajdonságok

- ▶ A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- ▶ Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- ▶ Szem/kamera tulajdonságok:
 - ▶ szempozíció (**eye**),
 - ▶ egy pont amire néz (**center**),
 - ▶ felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
 - ▶ nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (fov_x , fov_y).
 - ▶ (vetítővászon mérete. Most legyen adott:
$$2 \tan\left(\frac{fov_x}{2}\right) \times 2 \tan\left(\frac{fov_y}{2}\right) \text{ nagyságú })$$
- ▶ Ezek segítségével fogjuk megadni az (i, j) pixel világbeli koordinátáit

Kameratulajdonságok



Kameratulajdonságok



Kamera-koordinátarendszer

Keressük a kamera saját **u**, **v**, **w** (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- ▶ Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

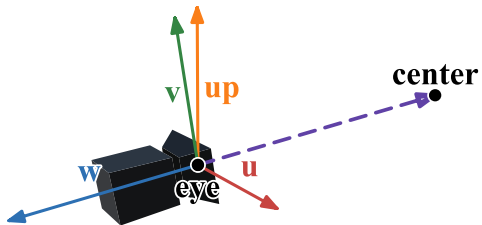
- ▶ Az X tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

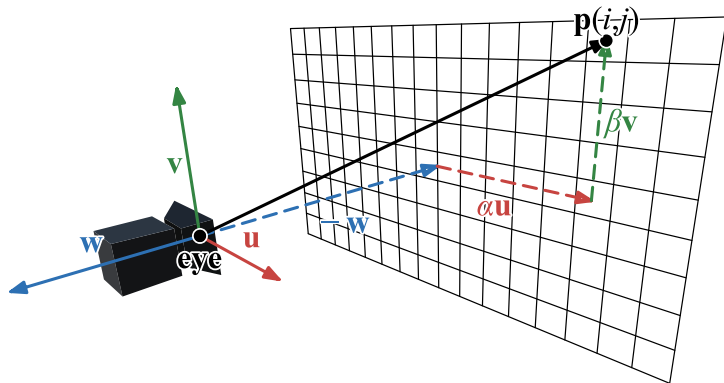
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

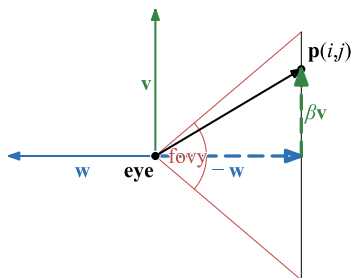
- ▶ Az Y tengely merőleges **u**-ra és **w**-re is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

Kamera-koordinátarendszer



(i, j) pixel koordinátái

(i, j) pixel koordinátái

- ▶ $width \times height$ a képernyő felbontása
- ▶ (i, j) a pixelkoordináták, ahol a bal felső sarok a $(0, 0)$

- ▶ Legyen $\mathbf{p}$ az i, j pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i, j) = \mathbf{eye} + (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

- ▶ Ahol

$$\alpha = \tan\left(\frac{fov_x}{2}\right) \cdot \frac{i - width/2}{width/2},$$

$$\beta = \tan\left(\frac{fov_y}{2}\right) \cdot \frac{height/2 - j}{height/2}.$$

A sugár egyenlete

- ▶ A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- ▶ Legyen $\mathbf{p}_0$ a sugár kezdőpontja, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

- ▶ A sugarak kezdőpontja a kamerapozíció, azaz $\mathbf{p}_0 = \mathbf{eye}$
- ▶ A sugarak irányvektorát pixel pozíciójából számoljuk:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}}{|\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}|}$$

Metszések

- ▶ A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- ▶ Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- ▶ A sugarunk mindig a korábban is látott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy $|\mathbf{v}| = 1$
- ▶ Ekkor a t sugárparaméter éppen a $\mathbf{p}(t)$ pont távolsága $\mathbf{p}_0$ -tól!

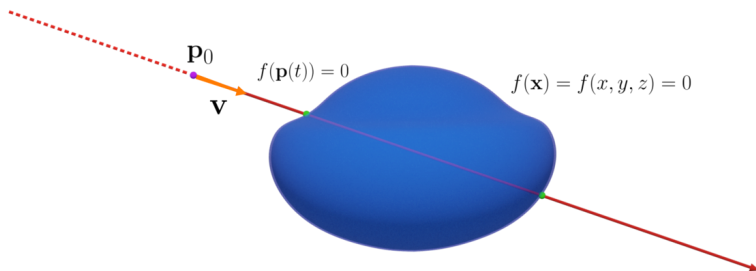
Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- ▶ Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- ▶ A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- ▶ Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- ▶ A kapott t -től függően a következő esetek állhatnak fenn:
 - ▶ Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
 - ▶ Ha $t = 0$ a sugár kezdőpontja a felületen van
 - ▶ Ha $t < 0$, akkor a sugár „mögött” van a felület és metszi a sugár egyenese a felületet (de nekünk $t > 0$ kell!)

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület



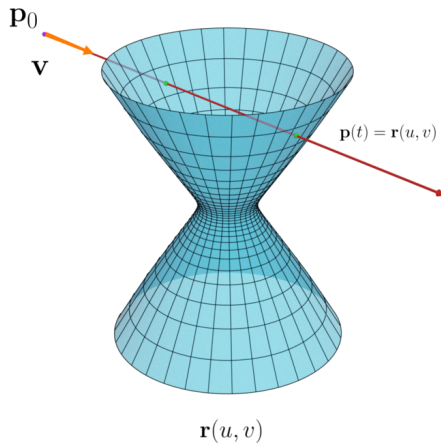
Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- ▶ Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- ▶ Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v) , hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

- ▶ Ez három ismeretlenes (t, u, v) , három egyenletes $(x, y, z$ koordinátánként egy) egyenletrendszer
- ▶ A t ugyanúgy ellenőrizendő, mint előbb, de most az (u, v) -re is figyeljünk, hogy a felületünk paramétertartományának megengedett részén van-e (pl. $(u, v) \in [0, 1]^2$ vagy hasonló)!

Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület



Sugár és transzformált objektumok metszése

- ▶ Legyen $\mathbf{M}$ egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- ▶ Feladat: Keressük $\mathbf{r}$ sugár és az $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontját.
- ▶ Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? – Lehetne, lásd. előző előadás, de metszésnél van egyszerűbb módszer.
- ▶ Megoldás: Transzformáljuk inkább a sugarat!

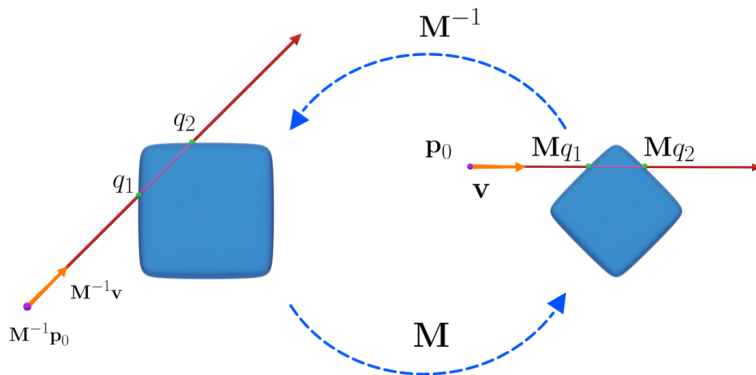
Sugár és transzformált objektumok metszése

Tétel

Az $\mathbf{r}$ sugár és az $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontja $\equiv$ az $\mathbf{M}^{-1}$ -zel transzformált $\mathbf{r}$ sugár és az objektum metszéspontja.

- ▶ $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, homogén transzformáció
- ▶ Sugár kezdőpontja: $\mathbf{p}_0 = (p_x, p_y, p_z) \rightarrow [p_x, p_y, p_z, 1]^T$
- ▶ Sugár iránya: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \rightarrow [v_x, v_y, v_z, 0]^T$. Így nem hat rá az eltolás.
- ▶ Transzformált sugár: $\hat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_0 + t \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$

Sugár és transzformált objektumok metszése



Sugar és transzformált objektumok metszése

- ▶ Metszésvizsgálat: használjuk $\hat{\mathbf{r}}(t)$ -t.
- ▶ Metszéspont: az eredeti objektumon $\mathbf{q}$, akkor a transzformált objektumon $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.
- ▶ Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!
- ▶ Normálvektorok: $\mathbf{n}$ helyett $\tilde{\mathbf{M}}^{-T} \cdot \mathbf{n}$ (inverz-transzponált), ahol $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ az $\mathbf{M}$ bal felső 3×3 -as része.

Sugár és implicit sík metszéspontja

- ▶ Síkot megadhatunk implicit alakban: $Ax + By + Cz + D = 0$
- ▶ A

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

sugár egyenese metszi a síkot, ha

$$A(p_x + tv_x) + B(p_y + tv_y) + C(p_z + tv_z) + D = 0$$

Sugár és implicit sík metszéspontja

- ▶ Ezt t -re átrendezve adódik

$$t(Av_x + Bv_y + Cv_z) + Ap_x + Bp_y + Cp_z + D = 0$$
$$t = -\frac{Ap_x + Bp_y + Cp_z + D}{Av_x + Bv_y + Cv_z}$$

- ▶ Látható a sík a nézőpontunkból, ha $t > 0$

Sugar és normálvektoros sík metszéspontja

- ▶ Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,
- ▶ Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- ▶ Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- ▶ A sík egyenlete:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0$$

– minden $\mathbf{x}$ pontja a síknak kielégíti ezt az egyenletet.

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- ▶ Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$ -t a $\mathbf{x}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

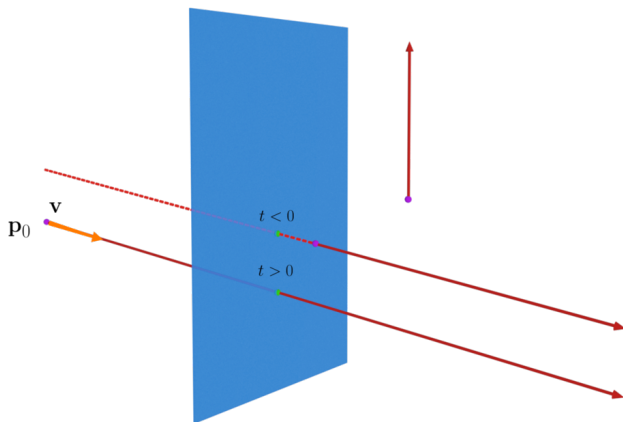
$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.

- ▶ A sugár metszi a síkot, ha: $t > 0$.
- ▶ Ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal, és így vagy nincs metszéspontjuk, vagy az egyenes a síkon fut

Sugár és sík metszéspontja



Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- ▶ Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}_0$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- ▶ Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v -t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- ▶ Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

- ▶ Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0 = -t\mathbf{v} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Sugar és parametrikus sík metszéspontja

- ▶ Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő
- ▶ Mátrix alakban:

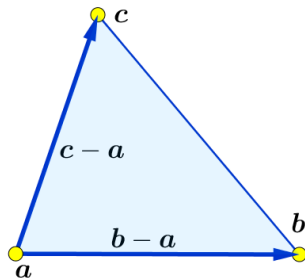
$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_{0x} \\ p_{0y} - q_{0y} \\ p_{0z} - q_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

- ▶ Látjuk a síkot, ha $t > 0$ (most $u, v \in \mathbb{R}$ a felület paramétertartománya, ez teljesülni fog)

Sugar és háromszög metszéspontja I.

- ▶ A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- ▶ Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzá tartozó sík egy parametrikus megadása

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



- ▶ A korábbi jelölésekkel: $\mathbf{q}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{i} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $\mathbf{j} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$.

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- ▶ Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{s}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

ahol az együtthatók 1-re összegződnek.

- ▶ Elvégezve tehát a parametrikus síkkal a metszést, megkapjuk a baricentrikus koordinátáit a sugár síkkal való metszéspontjának. A sugárparamétert ne felejtsük el ellenőrizni!
- ▶ Utolsó lépésként ellenőriznünk kell, hogy a metszéspont a háromszögön belül van-e. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$0 \leq u, \quad 0 \leq v \quad \text{és} \quad 0 \leq 1 - u - v.$$

Sugar és háromszög metszéspontja II.

- ▶ A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- ▶ Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
 - ▶ egy pontja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bármelyike
 - ▶ normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|},$$

ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelöli, és ekkor $\mathbf{n}$ egységnyi hosszúságú.

Sugar és háromszög metszéspontja II.

- ▶ Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen $\mathbf{p}$ (már ha létezik).
- ▶ Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{p}$ pont $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ -re vonatkoztatott baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- ▶ $\mathbf{p}$ akkor, és csak akkor van a $\triangle$ -ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Pont a háromszögon vizsgálat

- ▶ Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

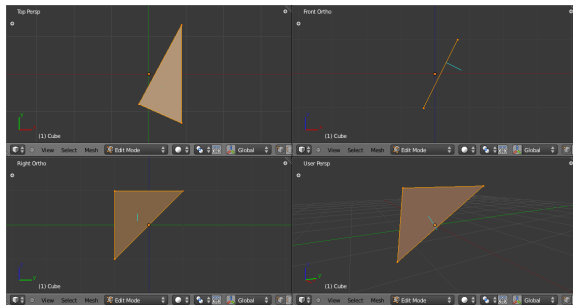
$$z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- ▶ A gyorsabb számolásért vegyük a fentiek egy síkra vett vetületét
- ▶ A koordinátasíkok közül (XY , XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb! $\rightarrow$ a háromszög és a sík normálisa leginkább „egyállású”
- ▶ A vetülethez egyszerűen elhagyjuk z , y vagy x egyenletét, megfelelően.

Pont a háromszögen vizsgálat

Azt tengely kell választani, amelyik mentén a legnagyobb a háromszög normálvektorának abszolút értéke.
(Így biztos nem fordulhat elő, hogy a háromszög merőleges a síkra, és csak egy szakasz marad belőle!)



Pont a háromszögön vizsgálat

- ▶ Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

- ▶ Behelyettesítve $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ -t, és rendezve:

$$x = \lambda_1(a_x - c_x) + \lambda_2(b_x - c_x) + c_x$$

$$y = \lambda_1(a_y - c_y) + \lambda_2(b_y - c_y) + c_y$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2 -re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) + (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

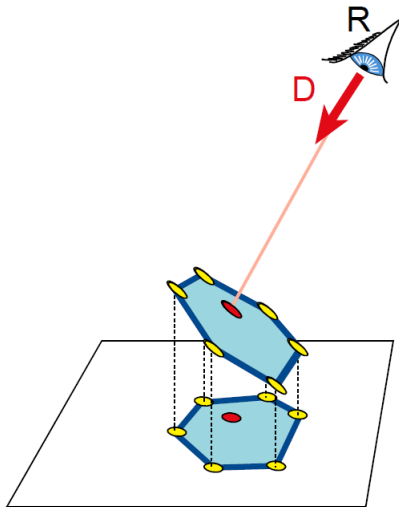
- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.
- **p** akkor és csak akkor van a háromszögön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Sugar metszése poligonnal

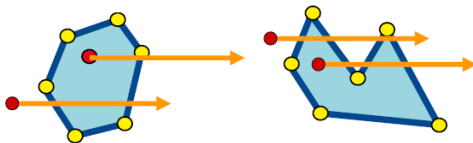
- ▶ Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
 - ▶ A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával
 - ▶ Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e
- ▶ A másodikat egy síkban érdemes csinálni (vagy a poligon síkjában, vagy a poligon valamely koordinátatengelyre vett vetületének síkjában)

Sugár metszése poligonnal



Pont-polygon tartalmazás teszt síkban

- ▶ A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)
- ▶ Konkáv és csillag alakú poligonra is működik



Sugár metszése szakasszal

- ▶ A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T$, $\mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$
- ▶ Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- ▶ Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, $\mathbf{v}$ tetszőleges
- ▶ Legyen $\mathbf{v} = (1, 0)$!
- ▶ Így a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ egyenletet csak y koordinátára kell megoldani

Sugár metszése szakasszal

- ▶ Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s -re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- ▶ Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- ▶ s -t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- ▶ Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ -be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt
- ▶ Ha $s \notin [0, 1]$: a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)
- ▶ Ha $t \leq 0$: a sugár egybeesik a szakasszal, vagy mögötte van a metszéspont

Sugár és gömb metszéspontja

- ▶ Az r sugarú, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

- ▶ Ugyanez skalárszorozattal felírva:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0,$$

ahol $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$.

Sugár és gömb metszéspontja

- ▶ Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- ▶ Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- ▶ Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- ▶ Kifejtve:

$$\langle t\mathbf{v} + (\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}), t\mathbf{v} + (\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}) \rangle - r^2 = 0$$

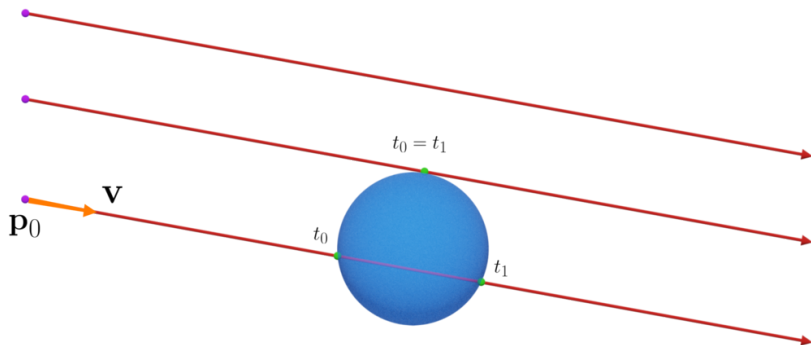
$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- ▶ Ez másodfokú egyenlet t -re (minden más ismert).
- ▶ Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- ▶ Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- ▶ Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- ▶ Ha $D < 0$: nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.
- ▶ Sugárparamétert ezután ellenőrizni kell ($t > 0$): a legkisebb pozitív t a megoldás (ha létezik)

Sugár és gömb metszéspontja



Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- ▶ Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ▶ Gyakorlatilag baj van, ha $a \approx 0$
 - ▶ Átalakítással kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

formában felírható a két gyök („citardauq” formula)

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- ▶ Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

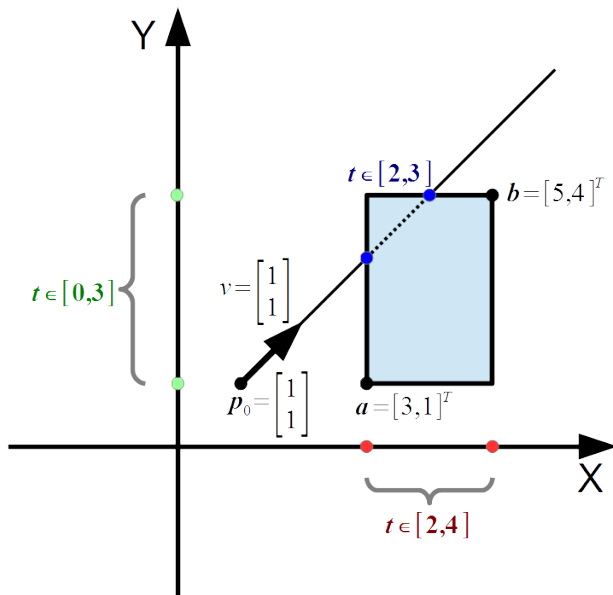
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ▶ Gyakorlatilag baj van, ha $b \gg 4ac$
 - ▶ Ekkor $b^2 - 4ac \approx b^2$ (sőt!), vagyis b előjelétől függően vagy $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ vagy pedig $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ elveszti az értékes tizedesjegyeket
 - ▶ Számítsuk ki az egyik gyököt azon az ágon, amelyiken nem vonunk ki egymásból két közel azonos pozitív számot, a másik gyököt pedig a Viète-formulákból
 - ▶ Azaz például ha $b > 0$, akkor $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és $x_2 = \frac{c}{ax_1}$

Sugár metszése AAB-vel

- ▶ AAB = *Axis Aligned Box*, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- ▶ Legyen a sugarunk $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ segítségével ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$)!
- ▶ Ötlet: koordináta-irányonként külön számolunk. Minden irányra kapunk egy-egy intervallumot t -re, és a sugár metszi a dobozt, ha az intervallumok metszete nem üres.

Sugár metszése AAB-vel



Sugar metszése AAB-vel

- ▶ Legyen $t_{near} := -\infty$, $t_{far} := +\infty$
- ▶ Ha $v_x = 0$: merőleges az x -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).
Ekkor nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben az x -koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- ▶ Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$, $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- ▶ Ha $t_1 > t_2$: cseréljük meg t_1 , t_2 -t!
- ▶ Ha $t_{near} < t_1$: $t_{near} := t_1$
- ▶ Ha $t_{far} > t_2$: $t_{far} := t_2$
- ▶ A fentit végezzük el az y és z koordinátákra is

Sugár metszése AAB-vel

- ▶ Ha $t_{near} > t_{far}$: nem találtuk el a dobozt
- ▶ Ha $t_{far} < 0$: a doboz mögöttünk van
- ▶ Ha $t_{near} < 0 < t_{far}$: a sugár kezdőpontja a dobozban van
- ▶ Minden más esetben a sugarunk metszéspontjai a dobozzal t_{near} és t_{far} -ban lesznek (sorban a közelebbi és távolabbi metszéspontok)