

# Számítógépes Grafika

## 5. előadás: sugármetszés

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

# Tartalom

## 1 Raycasting

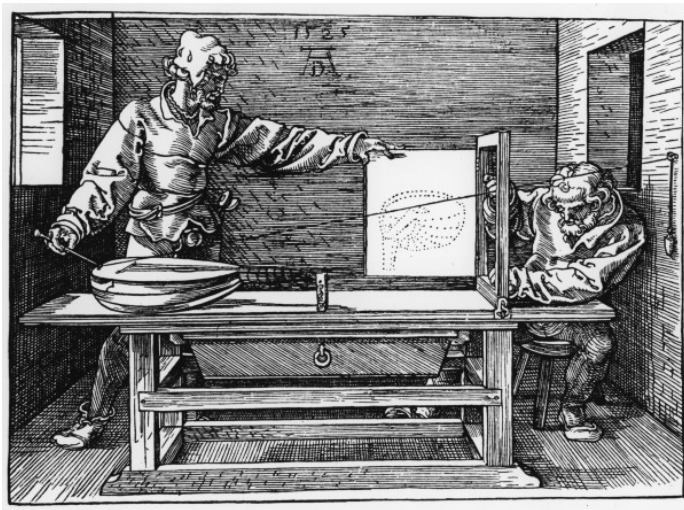
- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása

## 2 Metszések

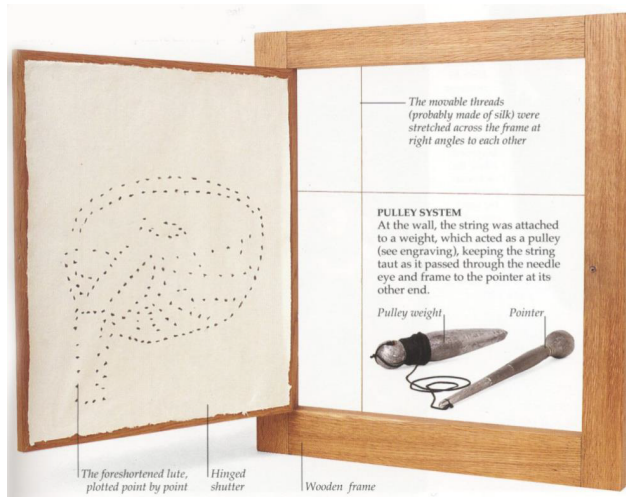
- Általánosan
- Sík
- Háromszög és sokszög
- Gömb
- Doboz

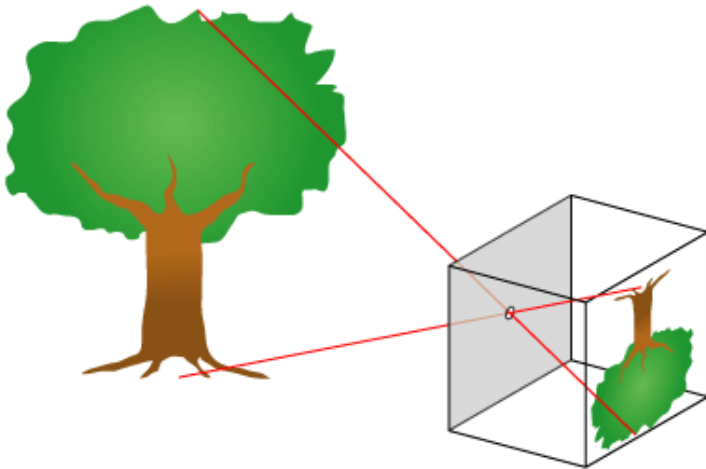
# Tartalom

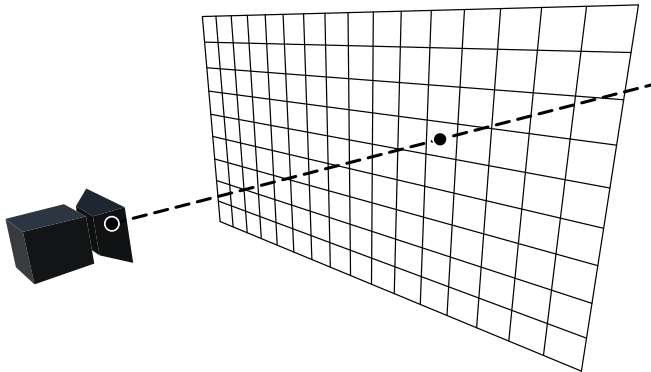
- 1 Raycasting
  - Motiváció
  - Raycasting
  - Sugarak indítása
- 2 Metszések
  - Általánosan
  - Sík
  - Háromszög és sokszög
  - Gömb
  - Doboz



Albrecht Dürer, 1525







# Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra

# Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel?

# Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel? → Nézzük meg, mi látszik onnan a világból és az alapján rendeljük hozzá a pixelhez egy színt!

# Tartalom

## 1 Raycasting

- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása

## 2 Metszések

- Általánosan
- Sík
- Háromszög és sokszög
- Gömb
- Doboz

# Raycasting

Minden pixelre:

Indítsunk egy sugarat a színtérbe

Minden objektumra a színtérben:

Nézzük meg, hogy metszi-e a sugár az objektumot

A legközelebbi metszett objektum  
színével színezzük ki a pixelt

# Sugár

- A sugárnak van
  - egy  $\mathbf{p}_0$  kiindulási pontja
  - és egy  $\mathbf{v}$  iránya

# Sugár

- A sugárnak van
  - egy  $\mathbf{p}_0$  kiindulási pontja
  - és egy  $\mathbf{v}$  iránya
- A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

ahol  $t > 0$  (félegyenes!).

- $t = 0?$ ,  $t < 0?$

# Sugár

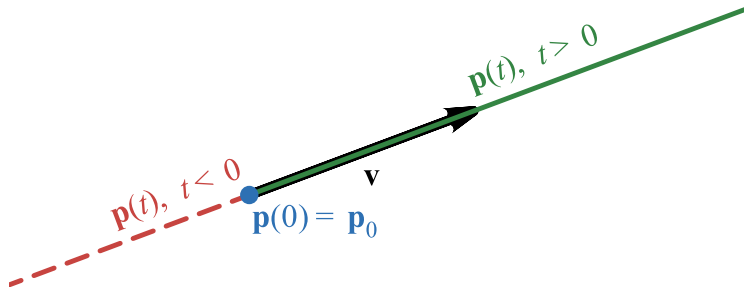
- A sugárnak van
  - egy  $\mathbf{p}_0$  kiindulási pontja
  - és egy  $\mathbf{v}$  iránya
- A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

ahol  $t > 0$  (félegyenes!).

- $t = 0?$ ,  $t < 0?$  sugár kezdőpontja, sugár mögötti részek

# Sugár



# Kérdések

- Honnan indítsuk a sugarat?

# Kérdések

- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?

# Kérdések

- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?
- Hogyan metsszük el a sugarat akármivel?

# Tartalom

## 1 Raycasting

- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása

## 2 Metszések

- Általánosan
- Sík
- Háromszög és sokszög
- Gömb
- Doboz

# Sugarak indítása – Kameratulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül

# Sugarak indítása – Kameratulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek

# Sugarak indítása – Kamerateulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),

# Sugarak indítása – Kamerateulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),

# Sugarak indítása – Kamerateulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),

# Sugarak indítása – Kameratulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).

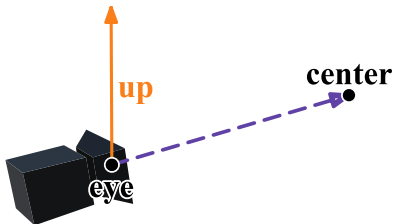
# Sugarak indítása – Kamerateulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).
  - (vetítővászon mérete. Most legyen adott:  
 $2 \tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2 \tan\left(\frac{fovy}{2}\right)$  nagyságú )

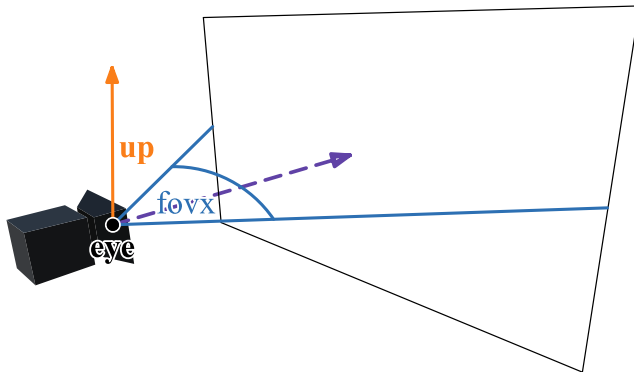
# Sugarak indítása – Kamerateulajdonságok

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).
  - (vetítővászon mérete. Most legyen adott:  
 $2 \tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2 \tan\left(\frac{fovy}{2}\right)$  nagyságú )
- Ezek segítségével fogjuk megadni az  $(i, j)$  pixel világbeli koordinátáit

# Kameratulajdonságok



# Kameratulajdonságok



# Kamera-koordinátarendszer

Keressük a kamera saját **u, v, w** (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera **-Z** irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

# Kamera-koordinátarendszer

Keressük a kamera saját **u**, **v**, **w** (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera **-Z** irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

- Az **X** tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

# Kamera-koordinátarendszer

Keressük a kamera saját **u**, **v**, **w** (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera **-Z** irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

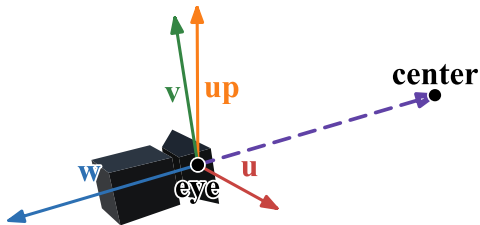
- Az **X** tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

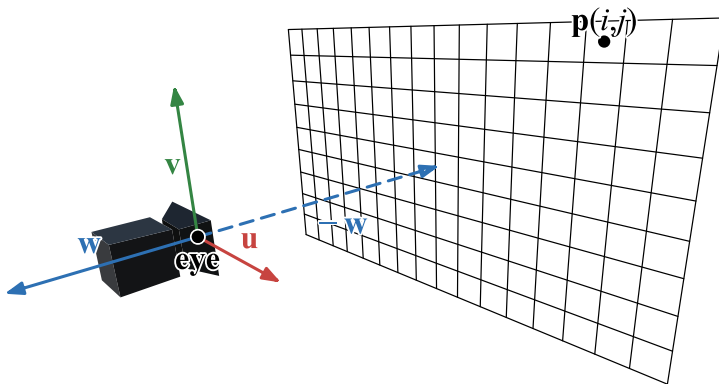
- Az **Y** tengely merőleges **u**-ra és **w**-re is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

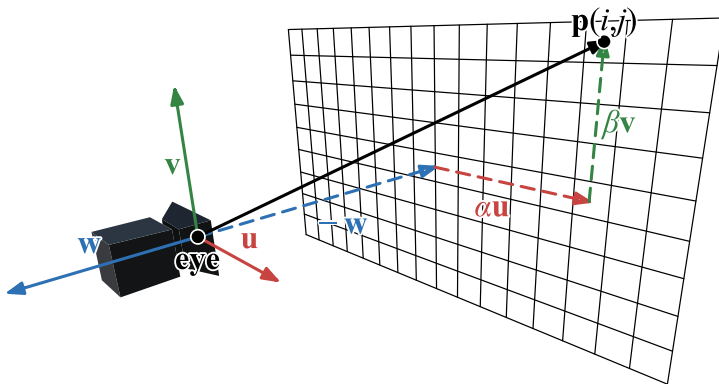
# Kamera-koordináta-rendszer



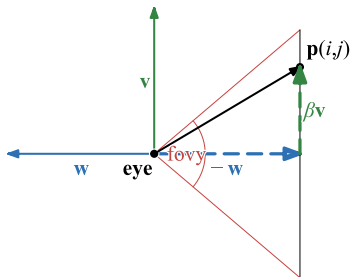
# $(i, j)$ pixel koordinátái



# $(i, j)$ pixel koordinátái



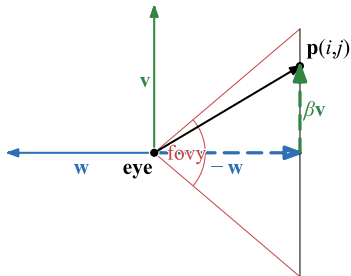
# $(i, j)$ pixel koordinátái



- Legyen  $\mathbf{p}$  az  $i, j$  pixel középpontja, a vetítősík egységni távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i, j) = \mathbf{eye} + (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

# $(i, j)$ pixel koordinátái



- $width \times height$  a képernyő felbontása
- $(i, j)$  a pixelkoordináták, ahol a bal felső sarok a  $(0, 0)$

- Legyen  $\mathbf{p}$  az  $i, j$  pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i, j) = \mathbf{eye} + (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

- Ahol

$$\alpha = \tan\left(\frac{fov_x}{2}\right) \cdot \frac{i - width/2}{width/2},$$

$$\beta = \tan\left(\frac{fov_y}{2}\right) \cdot \frac{height/2 - j}{height/2}.$$

# A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.

# A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen  $\mathbf{p}_0$  a sugár kezdőpontja,  $\mathbf{v}$  pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

# A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen  $\mathbf{p}_0$  a sugár kezdőpontja,  $\mathbf{v}$  pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

- A sugarak kezdőpontja a kamerapozíció, azaz  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{eye}$

# A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen  $\mathbf{p}_0$  a sugár kezdőpontja,  $\mathbf{v}$  pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

- A sugarak kezdőpontja a kamerapozíció, azaz  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{eye}$
- A sugarak irányvektorát pixel pozíciójából számoljuk:  
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}}{|\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}|}$$

# Tartalom

- 1 Raycasting
  - Motiváció
  - Raycasting
  - Sugarak indítása
- 2 Metszések
  - **Általánosan**
  - Sík
  - Háromszög és sokszög
  - Gömb
  - Doboz

# Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni

# Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak

# Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a korábban is látott  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy  $|\mathbf{v}| = 1$

# Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a korábban is látott  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy  $|\mathbf{v}| = 1$
- Ekkor a  $t$  sugárparaméter éppen a  $\mathbf{p}(t)$  pont távolsága  $\mathbf{p}_0$ -tól!

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben  $\rightarrow$  helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben  $\rightarrow$  helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk  $t$ -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben  $\rightarrow$  helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk  $t$ -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott  $t$ -től függően a következő esetek állhatnak fenn:

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben  $\rightarrow$  helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk  $t$ -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott  $t$ -től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha  $t > 0$ , akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben  $\rightarrow$  helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk  $t$ -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott  $t$ -től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha  $t > 0$ , akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
  - Ha  $t = 0$  a sugár kezdőpontja a felületen van

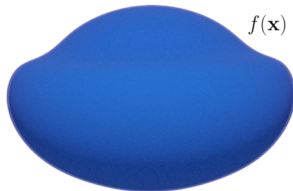
# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$  implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ )
- A sugarunk egyenlete  $\forall t \in [0, \infty)$ -re meghatároz egy pontot a térben  $\rightarrow$  helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk  $t$ -re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

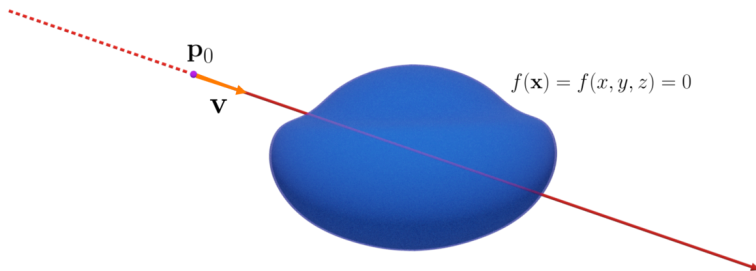
- A kapott  $t$ -től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha  $t > 0$ , akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
  - Ha  $t = 0$  a sugár kezdőpontja a felületen van
  - Ha  $t < 0$ , akkor a sugár „mögött” van a felület és metszi a sugár egyenese a felületet (de nekünk  $t > 0$  kell!)

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

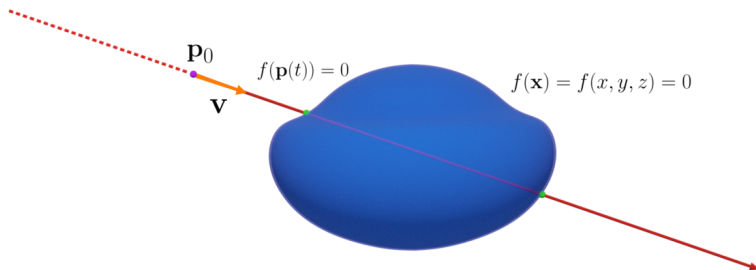


$$f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$$

# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület



# Metszések: parametrikus sugár – implicit felület



# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy  $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$  parametrikus felület

# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy  $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$  parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan  $t$  sugárparamétert, amihez létezik  $(u, v)$ , hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy  $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$  parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan  $t$  sugárparamétert, amihez létezik  $(u, v)$ , hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

- Ez három ismeretlenes  $(t, u, v)$ , három egyenletes  $(x, y, z)$  koordinátánként egy) egyenletrendszer

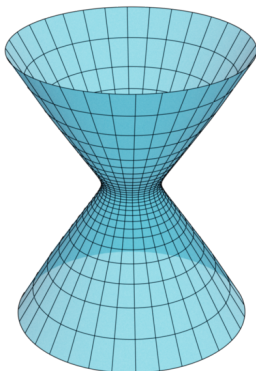
# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy  $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$  parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan  $t$  sugárparamétert, amihez létezik  $(u, v)$ , hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

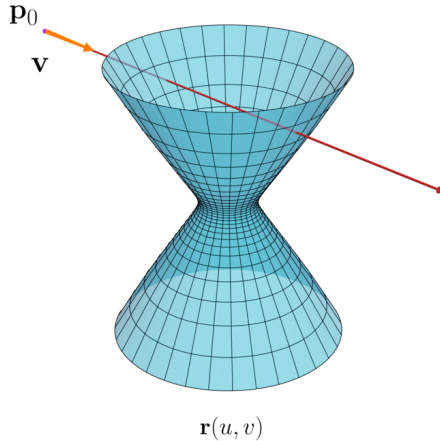
- Ez három ismeretlenes  $(t, u, v)$ , három egyenletes  $(x, y, z)$  koordinátánként egy) egyenletrendszer
- A  $t$  ugyanúgy ellenőrizendő, mint előbb, de most az  $(u, v)$ -re is figyeljünk, hogy a felületünk paramétertartományának megengedett részén van-e (pl.  $(u, v) \in [0, 1]^2$  vagy hasonló)!

# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

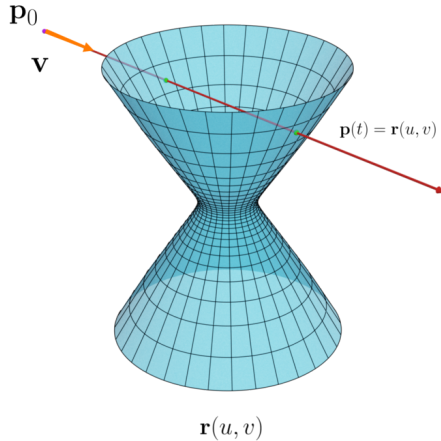


$$\mathbf{r}(u, v)$$

# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület



# Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület



# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen  $\mathbf{M}$  egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük  $\mathbf{r}$  sugár és az  $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontját.

# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen  $\mathbf{M}$  egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük  $\mathbf{r}$  sugár és az  $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontját.
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? – Lehetne, lásd. előző előadás, de metszésnél van egyszerűbb módszer.

# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen  $\mathbf{M}$  egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük  $\mathbf{r}$  sugár és az  $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontját.
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? – Lehetne, lásd. előző előadás, de metszésnél van egyszerűbb módszer.
- Megoldás: Transzformáljuk inkább a sugarat!

# Sugár és transzformált objektumok metszése

## Tétel

Az  $\mathbf{r}$  sugár és az  $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontja  $\equiv$  az  $\mathbf{M}^{-1}$ -zel transzformált  $\mathbf{r}$  sugár és az objektum metszéspontja.

# Sugár és transzformált objektumok metszése

## Tétel

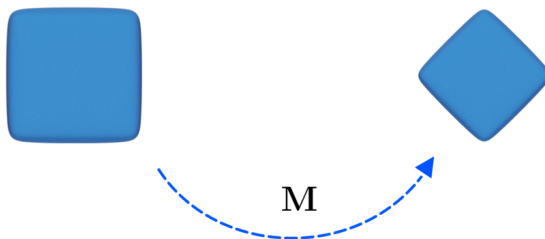
Az  $\mathbf{r}$  sugár és az  $\mathbf{M}$ -mel transzformált objektum metszéspontja  $\equiv$  az  $\mathbf{M}^{-1}$ -zel transzformált  $\mathbf{r}$  sugár és az objektum metszéspontja.

- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , homogén transzformáció
- Sugár kezdőpontja:  $\mathbf{p}_0 = (p_x, p_y, p_z) \rightarrow [p_x, p_y, p_z, 1]^T$
- Sugár iránya:  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \rightarrow [v_x, v_y, v_z, 0]^T$ . Így nem hat rá az eltolás.
- Transzformált sugár:  $\hat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_0 + t \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$

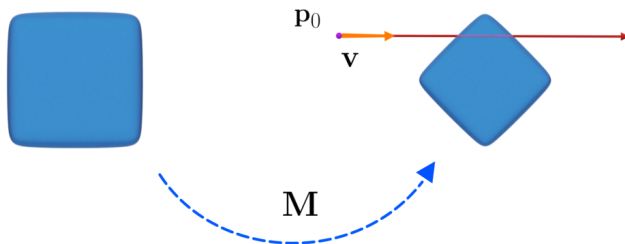
# Sugár és transzformált objektumok metszése



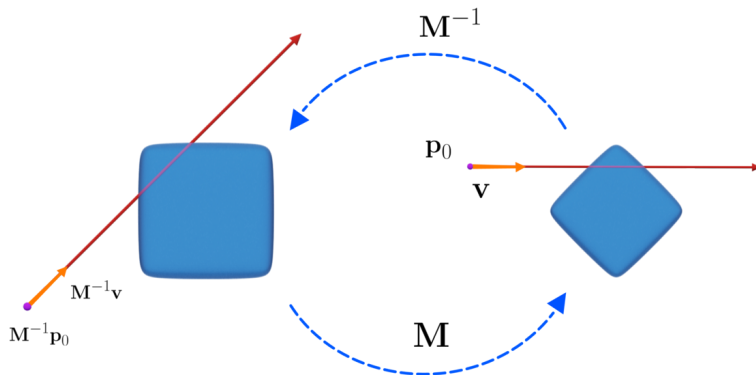
# Sugár és transzformált objektumok metszése



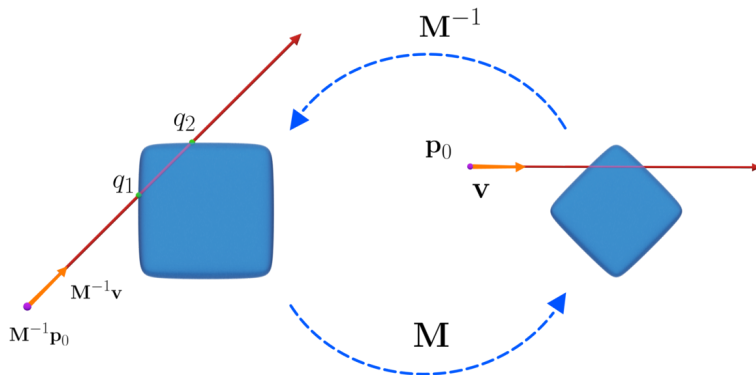
# Sugár és transzformált objektumok metszése



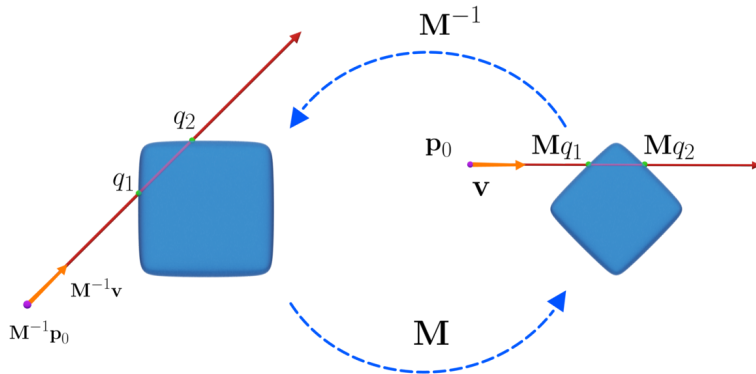
# Sugár és transzformált objektumok metszése



# Sugár és transzformált objektumok metszése



# Sugár és transzformált objektumok metszése



# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ -t.

# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ -t.
- Metszéspon: az eredeti objektumon  $\mathbf{q}$ , akkor a transzformált objektumon  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$ .

# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ -t.
- Metszéspont: az eredeti objektumon  $\mathbf{q}$ , akkor a transzformált objektumon  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$ .
- Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!

# Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk  $\hat{\mathbf{r}}(t)$ -t.
- Metszéspon: az eredeti objektumon  $\mathbf{q}$ , akkor a transzformált objektumon  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$ .
- Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!
- Normálvektorok:  $\mathbf{n}$  helyett  $\tilde{\mathbf{M}}^{-T} \cdot \mathbf{n}$  (inverz-transzponált), ahol  $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  az  $\mathbf{M}$  bal felső  $3 \times 3$ -as része.

# Tartalom

## 1 Raycasting

- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása

## 2 Metszések

- Általánosan
- **Sík**
- Háromszög és sokszög
- Gömb
- Doboz

# Sugár és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban:  $Ax + By + Cz + D = 0$

# Sugár és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban:  $Ax + By + Cz + D = 0$
- A

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

sugár egyenese metszi a síkot, ha

$$A(p_x + tv_x) + B(p_y + tv_y) + C(p_z + tv_z) + D = 0$$

# Sugár és implicit sík metszéspontja

- Ezt  $t$ -re átrendezve adódik

$$t(Av_x + Bv_y + Cv_z) + Ap_x + Bp_y + Cp_z + D = 0$$

$$t = -\frac{Ap_x + Bp_y + Cp_z + D}{Av_x + Bv_y + Cv_z}$$

# Sugár és implicit sík metszéspontja

- Ezt  $t$ -re átrendezve adódik

$$t(Av_x + Bv_y + Cv_z) + Ap_x + Bp_y + Cp_z + D = 0$$
$$t = -\frac{Ap_x + Bp_y + Cp_z + D}{Av_x + Bv_y + Cv_z}$$

- Látható a sík a nézőpontunkból, ha  $t > 0$

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{q}_0$  a sík egy pontja,  $\mathbf{n}$  a normálvektora,

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{q}_0$  a sík egy pontja,  $\mathbf{n}$  a normálvektora,
- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{q}_0$  a sík egy pontja,  $\mathbf{n}$  a normálvektora,
- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{q}_0$  a sík egy pontja,  $\mathbf{n}$  a normálvektora,
- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- A sík egyenlete:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0$$

– minden  $\mathbf{x}$  pontja a síknak kielégíti ezt az egyenletet.

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve  $\mathbf{p}(t)$ -t a  $\mathbf{x}$  helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve  $\mathbf{p}(t)$ -t a  $\mathbf{x}$  helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve  $\mathbf{p}(t)$ -t a  $\mathbf{x}$  helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

ha  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ .

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve  $\mathbf{p}(t)$ -t a  $\mathbf{x}$  helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

ha  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ .

- A sugár metszi a síkot, ha:  $t > 0$ .

# Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve  $\mathbf{p}(t)$ -t a  $\mathbf{x}$  helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

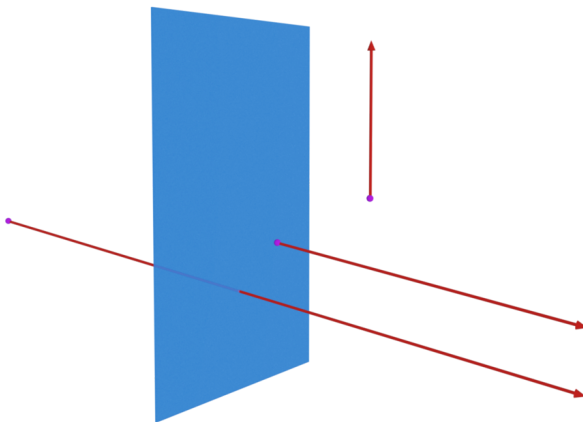
$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

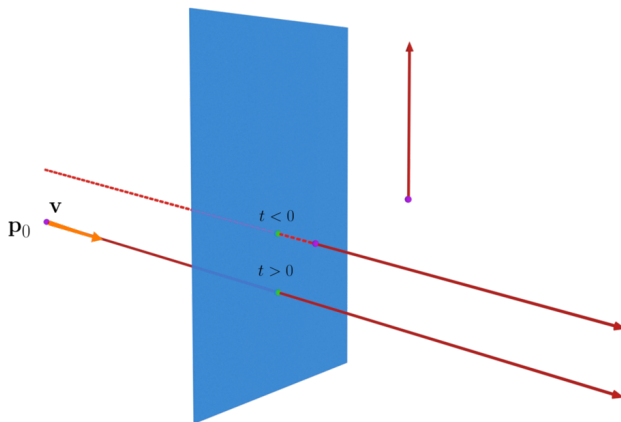
ha  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ .

- A sugár metszi a síkot, ha:  $t > 0$ .
- Ha  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , akkor az egyenes párhuzamos a síkkal, és így vagy nincs metszéspontjuk, vagy az egyenes a síkon fut

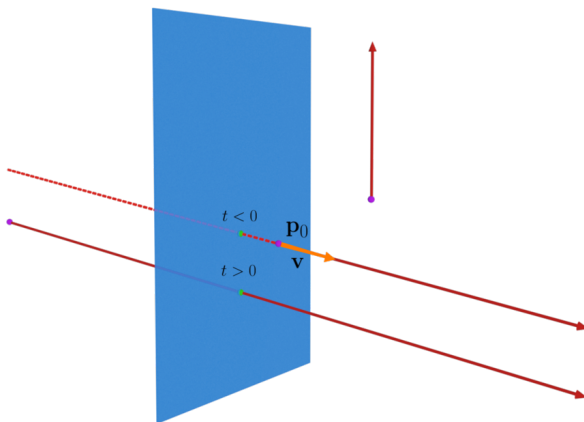
# Sugár és sík metszéspontja



# Sugár és sík metszéspontja



# Sugár és sík metszéspontja



# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy  $\mathbf{q}_0$  pontjával és  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  kifeszítő vektorokkal is:  $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$

# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy  $\mathbf{q}_0$  pontjával és  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  kifeszítő vektorokkal is:  $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  sugár egyenesével: keressük  $t$  és  $u, v$ -t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy  $\mathbf{q}_0$  pontjával és  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  kifeszítő vektorokkal is:  $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  sugár egyenesével: keressük  $t$  és  $u, v$ -t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy  $\mathbf{q}_0$  pontjával és  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  kifeszítő vektorokkal is:  $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  sugár egyenesével: keressük  $t$  és  $u, v$ -t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q}_0 + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

- Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0 = -t\mathbf{v} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha  $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  lineárisan nem összefüggő

# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha  $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_{0x} \\ p_{0y} - q_{0y} \\ p_{0z} - q_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

# Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha  $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_{0x} \\ p_{0y} - q_{0y} \\ p_{0z} - q_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

- Látjuk a síkot, ha  $t > 0$  (most  $u, v \in \mathbb{R}$  a felület paramétertartománya, ez teljesülni fog)

# Tartalom

- 1 Raycasting
  - Motiváció
  - Raycasting
  - Sugarak indítása
- 2 Metszések
  - Általánosan
  - Sík
  - Háromszög és sokszög
  - Gömb
  - Doboz

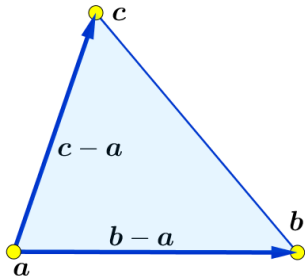
# Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.

# Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  a háromszög csúcsai, akkor a hozzá tartozó sík egy parametrikus megadása

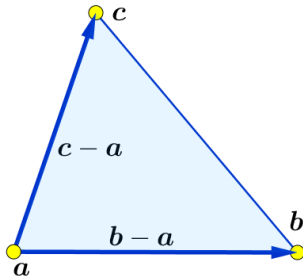
$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



# Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  a háromszög csúcsai, akkor a hozzá tartozó sík egy parametrikus megadása

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



- A korábbi jelölésekkel:  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{i} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  és  $\mathbf{j} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ .

# Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{s}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

ahol az együtthatók 1-re összegződnek.

# Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{s}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

ahol az együtthatók 1-re összegződnek.

- Elvégezve tehát a parametrikus síkkal a metszést, megkapjuk a baricentrikus koordinátáit a sugár síkkal való metszéspontjának. A sugárparamétert ne felejtsük el ellenőrizni!

# Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$s(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

ahol az együtthatók 1-re összegződnek.

- Elvégezve tehát a parametrikus síkkal a metszést, megkapjuk a baricentrikus koordinátáit a sugár síkkal való metszéspontjának. A sugárparamétert ne felejtsük el ellenőrizni!
- Utolsó lépésként ellenőriznünk kell, hogy a metszéspont a háromszögön belül van-e. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$0 \leq u, \quad 0 \leq v \quad \text{és} \quad 0 \leq 1 - u - v.$$

# Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.

# Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
  - egy pontja  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bármelyike

# Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha **a**, **b**, **c** a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
  - egy pontja **a**, **b**, **c** bármelyike
  - normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|},$$

ahol  $\times$  a vektoriális szorzást jelöli, és ekkor **n** egységnyi hosszúságú.

# Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen  $\mathbf{p}$  (már ha létezik).

# Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen  $\mathbf{p}$  (már ha létezik).
- Legyenek  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  a  $\mathbf{p}$  pont  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ -re vonatkoztatott baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

# Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen  $\mathbf{p}$  (már ha létezik).
- Legyenek  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  a  $\mathbf{p}$  pont  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ -re vonatkoztatott baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- $\mathbf{p}$  akkor, és csak akkor van a  $\triangle$ -ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Tudjuk, hogy  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$ . Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

$$z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

ill.  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- A gyorsabb számolásért vegyük a fentiek egy síkra vett vetületét

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Tudjuk, hogy  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$ . Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

$$z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

ill.  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- A gyorsabb számolásért vegyük a fentiek egy síkra vett vetületét
- A koordinátasíkok közül ( $XY$ ,  $XZ$  vagy  $YZ$ ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb!

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Tudjuk, hogy  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$ . Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

$$z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

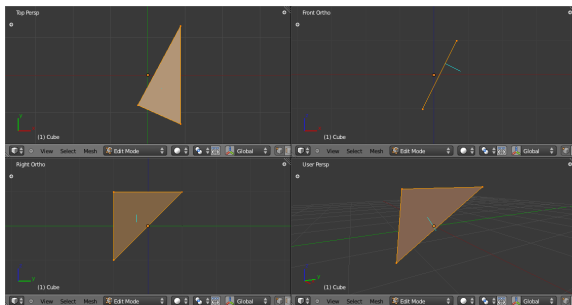
ill.  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- A gyorsabb számolásért vegyük a fentiek egy síkra vett vetületét
- A koordinátasíkok közül ( $XY$ ,  $XZ$  vagy  $YZ$ ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb!  $\rightarrow$  a háromszög és a sík normálisa leginkább „egyállású”
- A vetülethez egyszerűen elhagyjuk  $z$ ,  $y$  vagy  $x$  egyenletét, megfelelően.

# Pont a háromszögön vizsgálat

Azt tengely kell választani, amelyik mentén a legnagyobb a háromszög normálvektorának abszolút értéke.

(Így biztos nem fordulhat elő, hogy a háromszög merőleges a síkra, és csak egy szakasz marad belőle!)



# Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$

$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

- Behelyettesítve  $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ -t, és rendezve:

$$x = \lambda_1(a_x - c_x) + \lambda_2(b_x - c_x) + c_x$$

$$y = \lambda_1(a_y - c_y) + \lambda_2(b_y - c_y) + c_y$$

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve  $\lambda_1, \lambda_2$ -re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) + (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve  $\lambda_1, \lambda_2$ -re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) + (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.

# Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve  $\lambda_1, \lambda_2$ -re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) + (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.
- **p** akkor és csak akkor van a háromszögön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

# Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben

# Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával

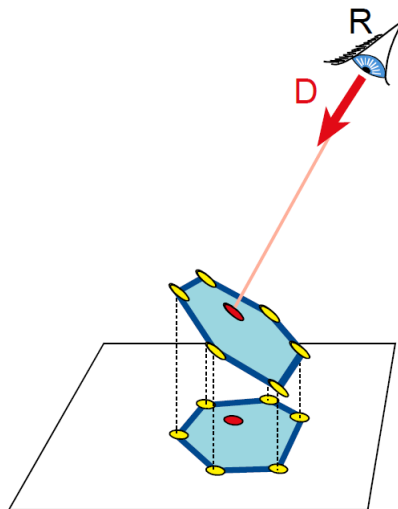
# Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával
  - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e

# Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával
  - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e
- A másodikat egy síkban érdemes csinálni (vagy a poligon síkjában, vagy a poligon valamely koordinátatengelyre vett vetületének síkjában)

# Sugár metszése poligonnal

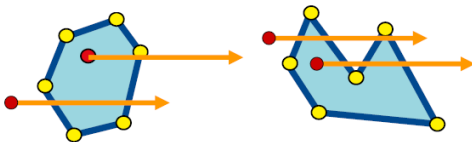


# Pont-poligon tartalmazás teszt síkban

- A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)

# Pont-polygon tartalmazás teszt síkban

- A pont a polygonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a polygon oldalaival (azaz a sugarat a polygon összes oldalszakaszával el kell metszeni)
- Konkáv és csillag alakú polygonra is működik



# Sugár metszése szakasszal

- A poligon  $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T$ ,  $\mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$  csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:  
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1 - s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$

# Sugár metszése szakasszal

- A poligon  $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T$ ,  $\mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$  csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:  
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1 - s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$
- Ezt kell metszeni a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú sugárral

# Sugár metszése szakasszal

- A poligon  $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T$ ,  $\mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$  csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:  
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$
- Ezt kell metszeni a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú sugárral
- Most: a  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$  pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e,  $\mathbf{v}$  tetszőleges

# Sugár metszése szakasszal

- A poligon  $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T$ ,  $\mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$  csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:  
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1 - s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$
- Ezt kell metszeni a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú sugárral
- Most: a  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$  pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e,  $\mathbf{v}$  tetszőleges
- Legyen  $\mathbf{v} = (1, 0)$ !

# Sugár metszése szakasszal

- A poligon  $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T$ ,  $\mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$  csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja:  
$$\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0, 1]$$
- Ezt kell metszeni a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú sugárral
- Most: a  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$  pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e,  $\mathbf{v}$  tetszőleges
- Legyen  $\mathbf{v} = (1, 0)$ !
- Így a  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  egyenletet csak  $y$  koordinátára kell megoldani

# Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  oldal egyenese a sugarat (=melyik  $s$ -re lesz  $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$ ?)

# Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  oldal egyenese a sugarat (=melyik  $s$ -re lesz  $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$ ?)
- Azaz  $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$

# Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  oldal egyenese a sugarat (=melyik  $s$ -re lesz  $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$ ?)
- Azaz  $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- $s$ -t kifejezve:  $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$

# Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  oldal egyenese a sugarat (=melyik  $s$ -re lesz  $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$ ?)
- Azaz  $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- $s$ -t kifejezve:  $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az  $x$  koordinátát  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ -be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt

# Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  oldal egyenese a sugarat (=melyik  $s$ -re lesz  $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$ ?)
- Azaz  $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- $s$ -t kifejezve:  $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az  $x$  koordinátát  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ -be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt
- Ha  $s \notin [0, 1]$  : a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)

# Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$  oldal egyenese a sugarat (=melyik  $s$ -re lesz  $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$ ?)
- Azaz  $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- $s$ -t kifejezve:  $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az  $x$  koordinátát  $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ -be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt
- Ha  $s \notin [0, 1]$  : a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)
- Ha  $t \leq 0$ : a sugár egybeesik a szakasszal, vagy mögötte van a metszéspont

# Tartalom

## 1 Raycasting

- Motiváció
- Raycasting
- Sugarak indítása

## 2 Metszések

- Általánosan
- Sík
- Háromszög és sokszög
- **Gömb**
- Doboz

# Sugár és gömb metszéspontja

- Az  $r$  sugarú,  $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$  középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

# Sugár és gömb metszéspontja

- Az  $r$  sugarú,  $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$  középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

- Ugyanez skalárszorzattal felírva:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0,$$

ahol  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ .

# Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.

# Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

# Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

# Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen  $\mathbf{p}_0$  ez egyenes egy pontja,  $\mathbf{v}$  az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Kifejtve:

$$\langle t\mathbf{v} + (\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}), t\mathbf{v} + (\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}) \rangle - r^2 = 0$$

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

# Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet  $t$ -re (minden más ismert).

# Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet  $t$ -re (minden más ismert).
- Legyen  $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$

# Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet  $t$ -re (minden más ismert).
- Legyen  $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- Ha  $D > 0$ : két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.

# Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet  $t$ -re (minden más ismert).
- Legyen  $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- Ha  $D > 0$ : két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha  $D = 0$ : egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.

# Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

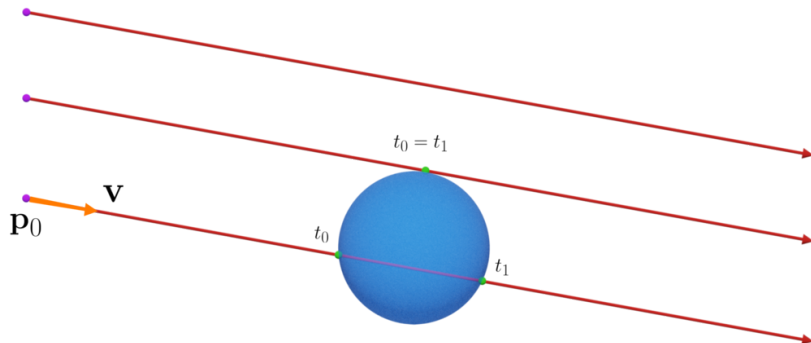
- Ez másodfokú egyenlet  $t$ -re (minden más ismert).
- Legyen  $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- Ha  $D > 0$ : két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha  $D = 0$ : egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha  $D < 0$ : nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.

# Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet  $t$ -re (minden más ismert).
- Legyen  $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2)$
- Ha  $D > 0$ : két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha  $D = 0$ : egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha  $D < 0$ : nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.
- Sugárparamétert ezután ellenőrizni kell ( $t > 0$ ): a legkisebb pozitív  $t$  a megoldás (ha létezik)

# Sugár és gömb metszéspontja



# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha  $a \approx 0$

# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha  $a \approx 0$ 
  - Átalakítással kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

formában felírható a két gyök („citardauq” formula)

# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha  $b \gg 4ac$

# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha  $b \gg 4ac$ 
  - Ekkor  $b^2 - 4ac \approx b^2$  (sőt!), vagyis  $b$  előjelétől függően vagy  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$  vagy pedig  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$  elveszti az értékes tizedesjegyeket

# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha  $b \gg 4ac$ 
  - Ekkor  $b^2 - 4ac \approx b^2$  (sőt!), vagyis  $b$  előjelétől függően vagy  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$  vagy pedig  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$  elveszti az értékes tizedesjegyeket
  - Számítsuk ki az egyik gyököt azon az ágon, amelyiken nem vonunk ki egymásból két közel azonos pozitív számot, a másik gyököt pedig a Viète-formulából

# Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható  $a \neq 0$  esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha  $b \gg 4ac$ 
  - Ekkor  $b^2 - 4ac \approx b^2$  (sőt!), vagyis  $b$  előjelétől függően vagy  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$  vagy pedig  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$  elveszti az értékes tizedesjegyeket
  - Számítsuk ki az egyik gyököt azon az ágon, amelyiken nem vonunk ki egymásból két közel azonos pozitív számot, a másik gyököt pedig a Viète-formulából
  - Azaz például ha  $b > 0$ , akkor  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  és  $x_2 = \frac{c}{ax_1}$

# Tartalom

- 1 Raycasting
  - Motiváció
  - Raycasting
  - Sugarak indítása
- 2 Metszések
  - Általánosan
  - Sík
  - Háromszög és sokszög
  - Gömb
  - Doboz

# Sugár metszése AAB-vel

- AAB = *Axis Aligned Box*, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak

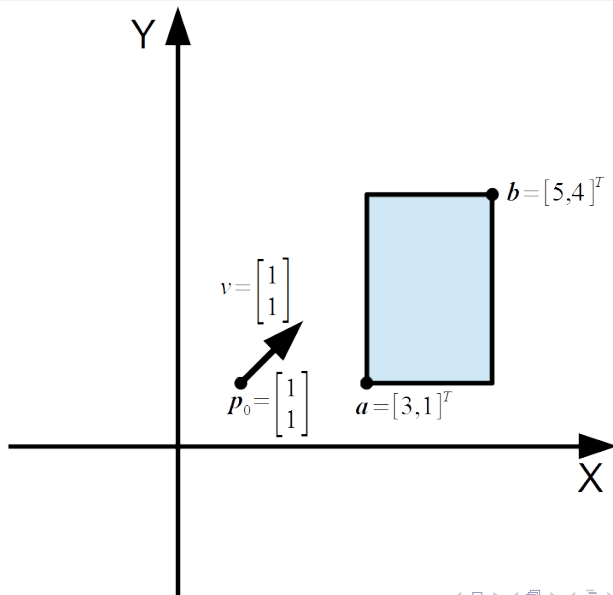
# Sugár metszése AAB-vel

- AAB = *Axis Aligned Box*, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- Legyen a sugarunk  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú, ahol  $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$ ,  $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$  a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával,  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  segítségével ( $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ )!

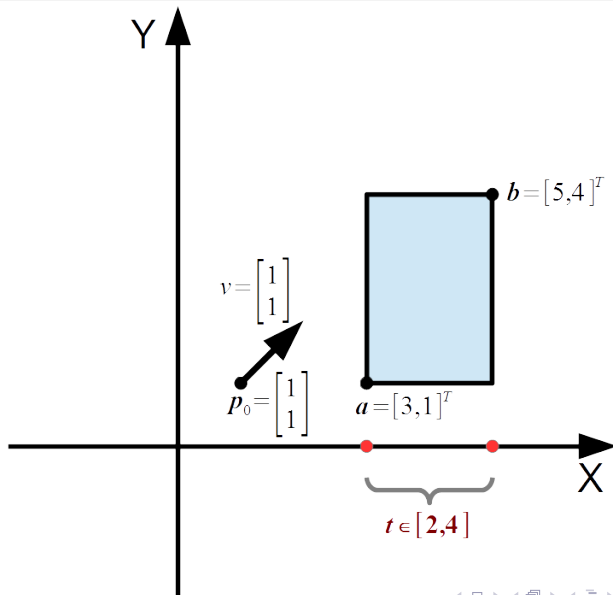
# Sugár metszése AAB-vel

- AAB = *Axis Aligned Box*, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- Legyen a sugarunk  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$  alakú, ahol  $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$ ,  $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$  a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával,  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  segítségével ( $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ )!
- Ötlet: koordináta-irányonként külön számolunk. Minden irányra kapunk egy-egy intervallumot  $t$ -re, és a sugár metszi a dobozt, ha az intervallumok metszete nem üres.

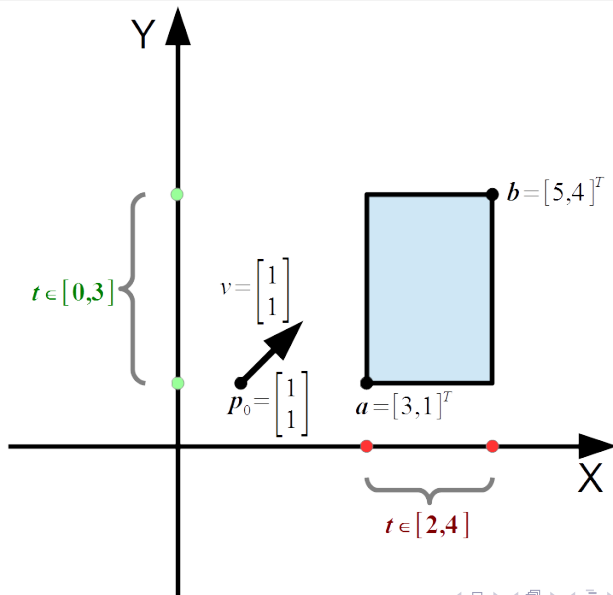
# Sugár metszése AAB-vel



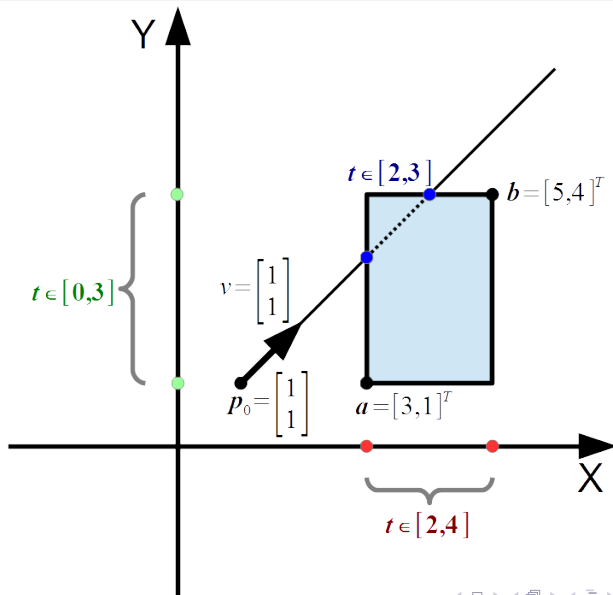
# Sugár metszése AAB-vel



# Sugár metszése AAB-vel



# Sugár metszése AAB-vel



# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty, t_{far} := +\infty$

# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty$ ,  $t_{far} := +\infty$
- Ha  $v_x = 0$ : merőleges az  $x$ -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).  
Ekkor nincs metszéspont, ha  $x_0 \notin [a_x, b_x]$ , különben az  $x$ -koordinátás számításokat kihagyhatjuk

# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty$ ,  $t_{far} := +\infty$
- Ha  $v_x = 0$ : merőleges az  $x$ -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).  
Ekkor nincs metszéspont, ha  $x_0 \notin [a_x, b_x]$ , különben az  $x$ -koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- Ha  $v_x \neq 0$ , akkor legyen  $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$ ,  $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$

# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty$ ,  $t_{far} := +\infty$
- Ha  $v_x = 0$ : merőleges az  $x$ -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).  
Ekkor nincs metszéspont, ha  $x_0 \notin [a_x, b_x]$ , különben az  $x$ -koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- Ha  $v_x \neq 0$ , akkor legyen  $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$ ,  $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha  $t_1 > t_2$ : cseréljük meg  $t_1$ ,  $t_2$ -t!

# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty$ ,  $t_{far} := +\infty$
- Ha  $v_x = 0$ : merőleges az  $x$ -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).  
Ekkor nincs metszéspont, ha  $x_0 \notin [a_x, b_x]$ , különben az  $x$ -koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- Ha  $v_x \neq 0$ , akkor legyen  $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$ ,  $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha  $t_1 > t_2$ : cseréljük meg  $t_1, t_2$ -t!
- Ha  $t_{near} < t_1$ :  $t_{near} := t_1$

# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty$ ,  $t_{far} := +\infty$
- Ha  $v_x = 0$ : merőleges az  $x$ -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).  
Ekkor nincs metszéspont, ha  $x_0 \notin [a_x, b_x]$ , különben az  $x$ -koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- Ha  $v_x \neq 0$ , akkor legyen  $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$ ,  $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha  $t_1 > t_2$ : cseréljük meg  $t_1, t_2$ -t!
- Ha  $t_{near} < t_1$ :  $t_{near} := t_1$
- Ha  $t_{far} > t_2$ :  $t_{far} := t_2$

# Sugár metszése AAB-vel

- Legyen  $t_{near} := -\infty$ ,  $t_{far} := +\infty$
- Ha  $v_x = 0$ : merőleges az  $x$ -tengelyre (pl. 2D-ben függőleges).  
Ekkor nincs metszéspont, ha  $x_0 \notin [a_x, b_x]$ , különben az  $x$ -koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- Ha  $v_x \neq 0$ , akkor legyen  $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$ ,  $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha  $t_1 > t_2$ : cseréljük meg  $t_1$ ,  $t_2$ -t!
- Ha  $t_{near} < t_1$ :  $t_{near} := t_1$
- Ha  $t_{far} > t_2$ :  $t_{far} := t_2$
- A fentit végezzük el az  $y$  és  $z$  koordinátákra is

# Sugár metszése AAB-vel

- Ha  $t_{near} > t_{far}$ : nem találtuk el a dobozt

# Sugár metszése AAB-vel

- Ha  $t_{near} > t_{far}$ : nem találtuk el a dobozt
- Ha  $t_{far} < 0$ : a doboz mögöttünk van

# Sugár metszése AAB-vel

- Ha  $t_{near} > t_{far}$ : nem találtuk el a dobozt
- Ha  $t_{far} < 0$ : a doboz mögöttünk van
- Ha  $t_{near} < 0 < t_{far}$ : a sugár kezdőpontja a dobozban van

# Sugár metszése AAB-vel

- Ha  $t_{near} > t_{far}$ : nem találtuk el a dobozt
- Ha  $t_{far} < 0$ : a doboz mögöttünk van
- Ha  $t_{near} < 0 < t_{far}$ : a sugár kezdőpontja a dobozban van
- Minden más esetben a sugarunk metszéspontjai a dobozzal  $t_{near}$  és  $t_{far}$ -ban lesznek (sorban a közelebbi és távolabbi metszéspontok)