

Számítógépes Grafika

4. előadás: görbék és felületek

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

Tartalom

Egyenesek és síkok leírása

- Áttekintés

- Egyenes

- Sík

Egyszerű görbék és felületek

- Görbék

- Felületek

A fény útja

- Ideális tükröződés

- Ideális törés

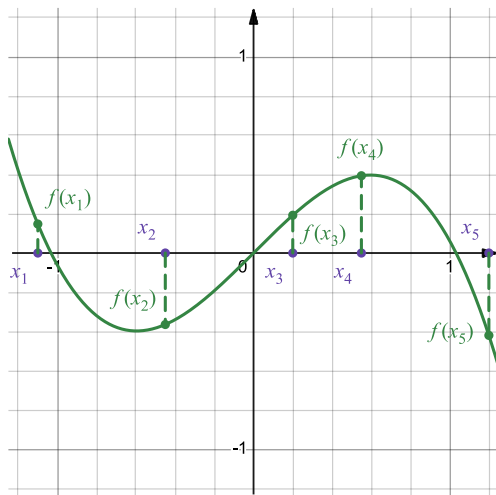
Motiváció

- ▶ Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni
- ▶ Hogyan tudjuk az egyszerűbb dolgokat leírni, mint például az egyenes vagy a sík?
- ▶ Elsődlegesen a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben vizsgáljuk a fenti kérdést

Görbék, felületek

- ▶ A görbét, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- ▶ Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - ▶ explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
 - ▶ parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - ▶ implicit: $f(x, y) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$

Explicit görbék



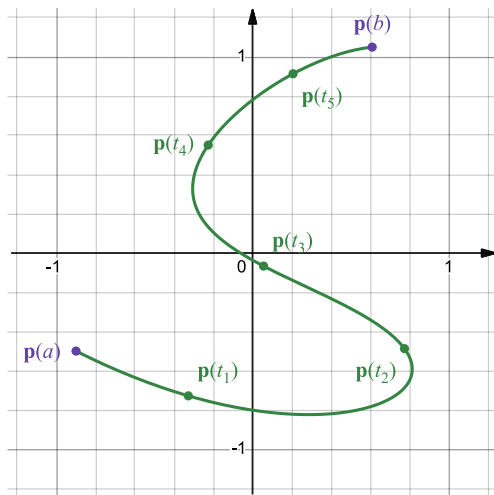
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = f(x), x \in \mathbb{R}$$

Ponthalmaz:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$$

Parametrikus görbék



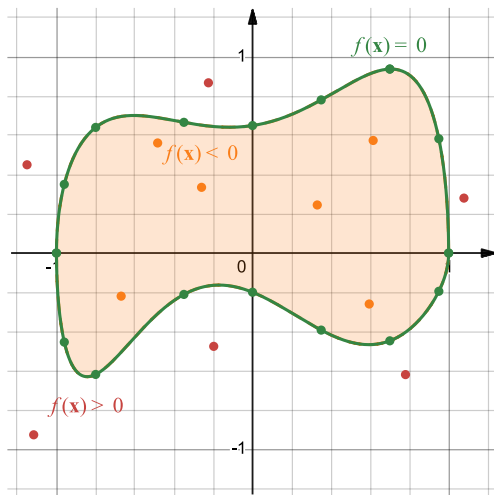
$$\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in [a, b]$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$$

Implicit görbék



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

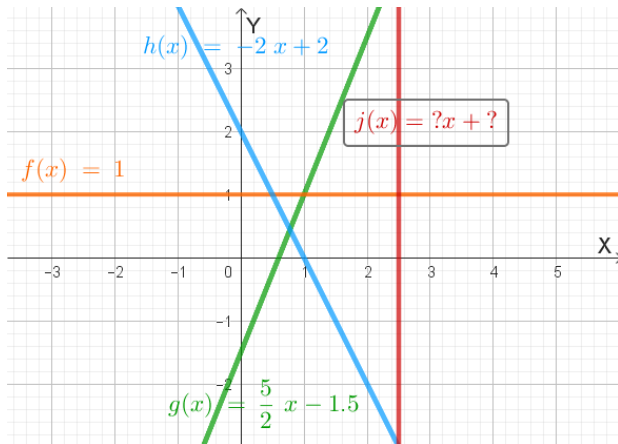
$$f(\mathbf{x}, y) = 0$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

Egyenes megadása – explicit alak

- Középiskolában: $y = mx + b$
- Probléma: mi legyen a függőleges egyenesekkel?



Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- ▶ Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- ▶ Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a

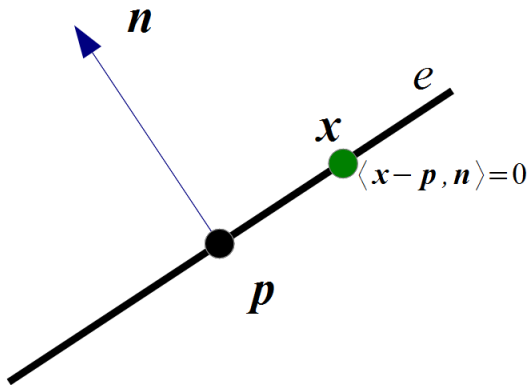
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y = 0$$

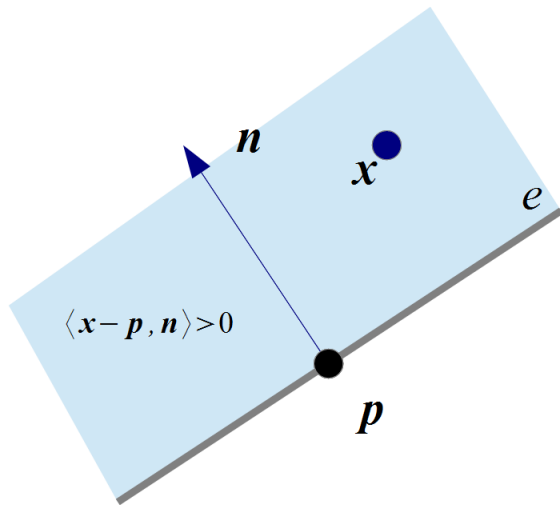
egyenletet.

- ▶ Az $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$ és $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$ az egyenesünk által meghatározott két félsík pontjainak jellemzése.

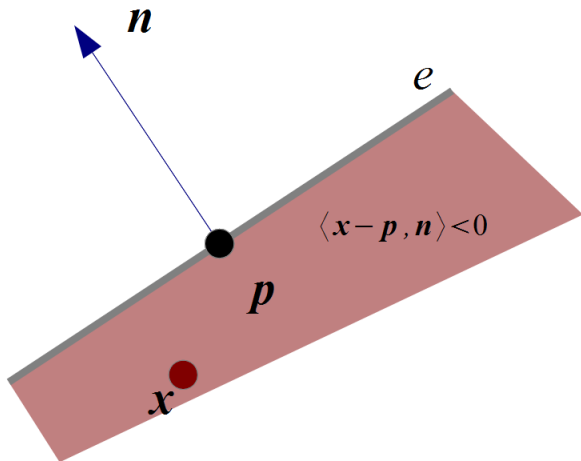
Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- ▶ Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.
- ▶ A fentiek alapján $a = n_x$, $b = n_y$ és $c = -(p_x n_x + p_y n_y)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ választással a **p** ponton átmenő, **n** normálisú egyenes implicit egyenletét kapjuk.
- ▶ Ha $a^2 + b^2 = 1$, akkor *Hesse-féle normalizált alakról* beszélünk – ekkor a korábbi normálvektor egység hosszúságú

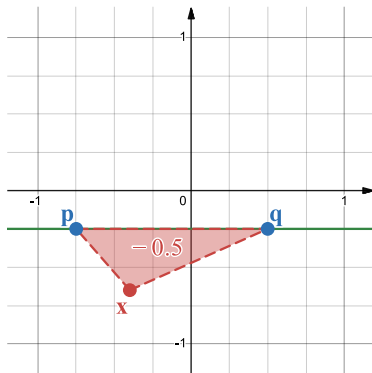
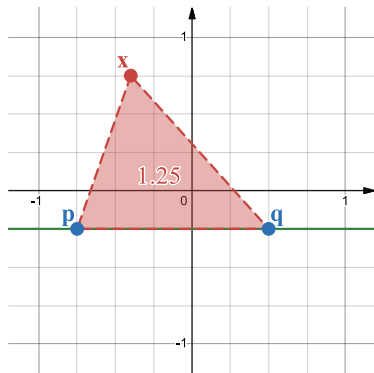
A homogén egyenlet determináns alakja

- ▶ Ha az egyenesünket két, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontjával adjuk meg, akkor azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok fekszenek az egyenesen, amelyekre $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & p_x & q_x \\ y & p_y & q_y \end{vmatrix} = 0$$

- ▶ Ahogy korábban, a determináns a három pont pontok által meghatározott háromszög előjeles területének duplája, ami egyenlő 0 $\iff$ a három pont egy egyenesbe esik

A homogén egyenlet determináns alakja – ábra



Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

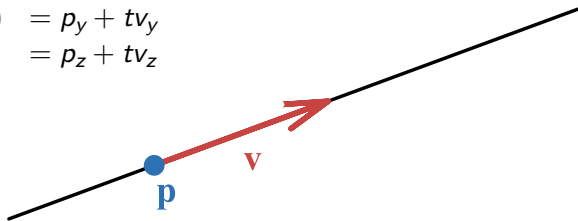
- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x(t) = p_x + tv_x$$

$$y(t) = p_y + tv_y$$

$$z(t) = p_z + tv_z$$



Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

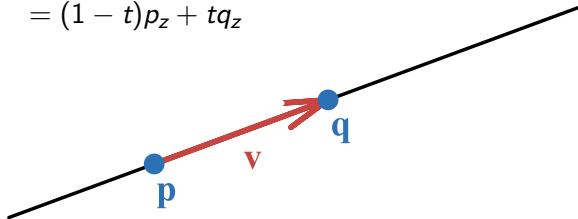
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow$$

$$x(t) = (1 - t)p_x + tq_x$$

$$y(t) = (1 - t)p_y + tq_y$$

$$z(t) = (1 - t)p_z + tq_z$$



*Homogén koordinátás alak

- ▶ A kibővített (projektív) sík egy egyenese megadható az $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$ valós számhármassal, úgynevezett *vonalkoordinátákkal*, amelyek felhasználásával az egyenes minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ pontjára

$$\mathbf{e}\mathbf{x} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$

- ▶ Az sík minden $[x_1, x_2, 0]$ ideális pontjára illeszkedő ideális egyenes vonalkoordinátái $[0, 0, 1]$.

*Az egyenes polár-koordinátás alakja

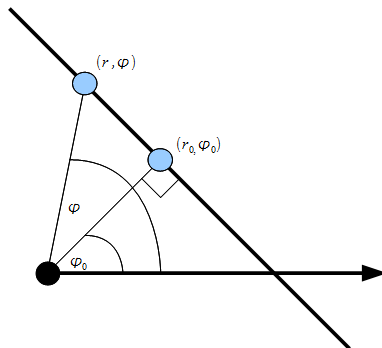
- ▶ Az origóból induló, a polártengellyel θ szöget bezáró félegyenes polárkoordinátás (implicit) egyenlete:

$$\phi = \theta$$

- ▶ Ha az egyenesünk nem halad át az origón, akkor legyen (r_0, ϕ_0) a metszéspontja az egyenesünknek és egy arra merőleges, origón áthaladó egyenesnek. Ekkor az egyenesünk polárkoordinátái közül a sugár a polárszög függvényeként felírható a következő alakban:

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\cos(\phi - \phi_0)}$$

*Az egyenes polár-koordinátás alakja



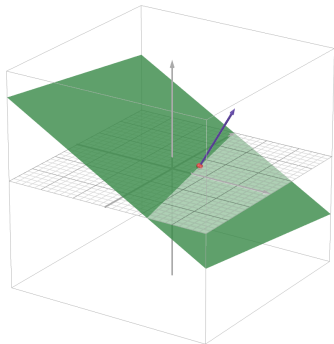
A sík normálvektoros egyenlete

- ▶ A sík megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával. Ekkor a sík minden $\mathbf{x}$ pontjára:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- ▶ Félterek:

- ▶ $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$
- ▶ $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$



Az sík homogén, implicit egyenlete

- ▶ A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$
- ▶ Előbbiből $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ és $d = -n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$ választással a $\mathbf{p}$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenletét kapjuk
- ▶ Hesse normál-alak itt is, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

A homogén egyenlet determináns alakja

- Determináns segítségével is megadhatjuk a sík egyenletét, a következő determináns csak $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y, q_z)$, $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$ pontok által kifeszített sík $\mathbf{x}(x, y, z)$ pontjaira lesz nulla:

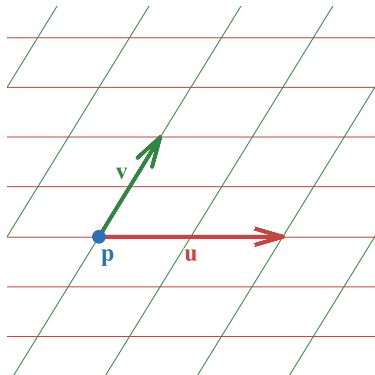
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ r_x & r_y & r_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A sík parametrikus egyenlete – kifeszítő vektorokkal

- ▶ A sík jellemezhető egy pontjával és két kifeszítő vektorával (bázisvektorával):

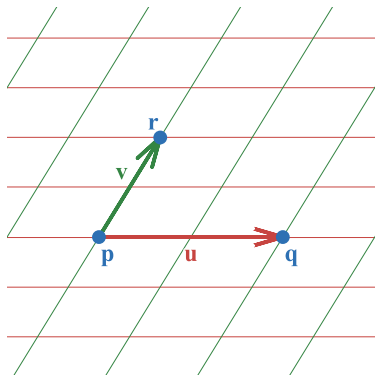
$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

ahol $s, t \in \mathbb{R}$.



A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- ▶ A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, **p**, **q**, **r**. Ekkor a sík minden véges **x** pontja megkapható $\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- ▶ Az előzőből: $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$
- ▶ Ez egy baricentrikus megadás: $\mathbf{x}(s, t) = (1 - s - t)\mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r}$ hiszen $(1 - s - t) + s + t = 1$



*Homogén koordinátás alak

- ▶ A kibővített tér egy síkja is megadható „síkkordinátákkal”, egy olyan $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3, s_4]$ négyessel, amely a sík minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ pontjára

$$\mathbf{s}\mathbf{x} = s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 0$$

*Nevezetes homogén alakú síkok

- ▶ $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- ▶ $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátság
- ▶ $[0, c, 0, 0]$ az XZ koordinátság
- ▶ $[0, 0, c, 0]$ az XY koordinátság

Görbék leírása

- ▶ Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- ▶ Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - ▶ explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - ▶ parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - ▶ implicit: $f(x, y) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- ▶ De hogyan tudjuk ezeket kirajzolni?
 - ▶ Explicit/parametrikus: görbén pontok generálása...
 - ▶ Implicit: képernyő pontjait ellenőrizzük, hogy a görbén van-e...

Görbék transzformációja

Hogyan transzformálunk görbéket a különböző megadási módokban?

- ▶ Explicit

- ▶ Függőleges eltolás és nyújtás: a függvényérték módosítása

- $\rightarrow y = a \cdot f(x) + b$

- ▶ Vízszintes eltolás és nyújtás: a paraméter inverz módosítása

- $\rightarrow y = f\left(\frac{x}{c} - d\right)$

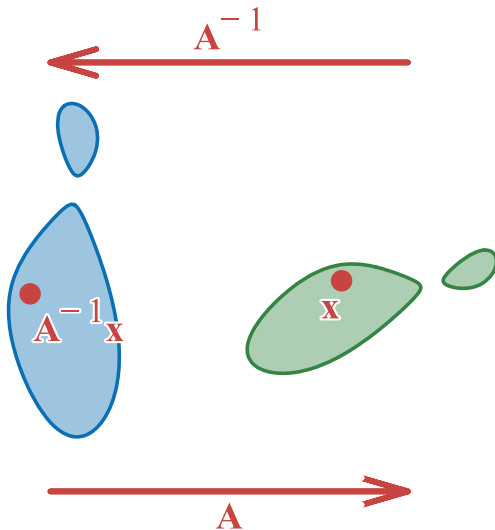
- ▶ Parametrikus: az eredménypont transzformációja

- $\rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(t)$

- ▶ Implicit: a paraméter transzformációja az inverzzel

- $\rightarrow f(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{x}) = 0$

Implicit görbék transzformációja



Parabola

- ▶ Az y tengelyű, origón átmenő, $(0, p)$ fókuszpontú parabola egy
 - ▶ Implicit egyenlete:

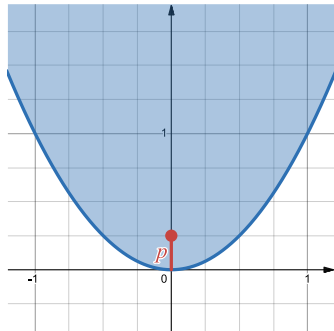
$$x^2 = 4py$$

- ▶ Explicit egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{4p}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{t^2}{4p} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Parabola

- ▶ Mi van, ha a $\mathbf{c}$ pontba akarjuk eltolni az origóból a parabolát?
- ▶ Az implicit és explicit alakban be kell vinni a (c_x, c_y) koordinátákat (pl. implicitből $(x - c_x)^2 = 4p(y - c_y)$ lesz)
- ▶ Parametrikus alakban egyszerűen $\mathbf{p}(t) + \mathbf{c}$ lesz az új alak.

Kör

► A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, r sugarú kör egy

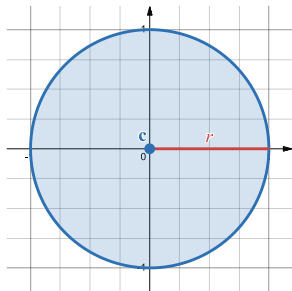
► Implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$$

► Explicit alakban nem tudjuk az egész kört leírni egy függvénnyel (DE két darabban menne, pl. $\mathbf{c} = \mathbf{0}, r = 1$ mellett $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, ahol $x \in [-1, 1]$)

► Parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = r \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \mathbf{c}, \text{ ahol } t \in [0, 2\pi)$$



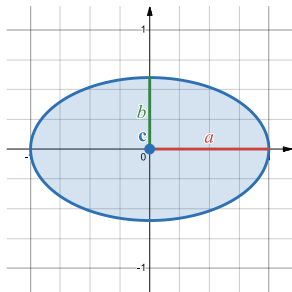
Ellipszis

- ▶ A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, nagytengelyével az x tengellyel párhuzamos, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egy
 - ▶ Implicit egyenlete:

$$\frac{(x - c_x)^2}{a^2} + \frac{(y - c_y)^2}{b^2} = 1$$

- ▶ Explicit alakban ugyanaz a probléma, mint a körnél (lásd előbb)
- ▶ Parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{bmatrix} + \mathbf{c}, \text{ ahol } t \in [0, 2\pi)$$



Ellipszis

- ▶ De mi van, ha nem akarjuk, hogy x, y tengellyel párhuzamosak legyenek a tengelyeink?
 - ▶ Implicit egyenlet: ez munkás(nak tűnik és habár nem az, de), nekünk most nem kell...
 - ▶ Parametrikus egyenlete: báziscsere! Ha az új tengelyek $\mathbf{k}, \mathbf{l}$, akkor $\mathbf{p}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{k} + b \sin t \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c}$, ahol $t \in [0, 2\pi)$

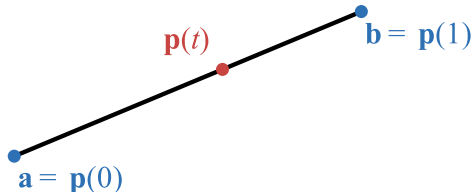
Szakasz

- ▶ Legyen adott két pont, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$. A két ponton átmenő egyenes parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$.

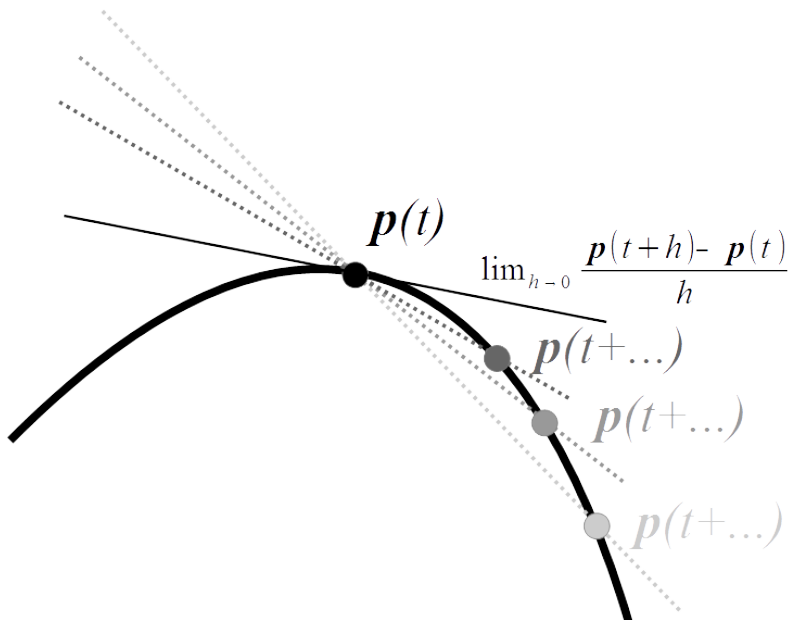
- ▶ Ha $t \in [0, 1]$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ pontokat összekötő egyenes szakaszt kapjuk.



Görbék parametrikus alakja

- ▶ Deriváltak: $\mathbf{p}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} x^{(i)}(t) \\ y^{(i)}(t) \end{bmatrix}, t \in [...], i = 0, 1, 2, \dots$
- ▶ Ha a görbét egy mozgó pont pályájának tekintjük, akkor az első derivált a sebességnek tekinthető, a második a gyorsulásnak stb.

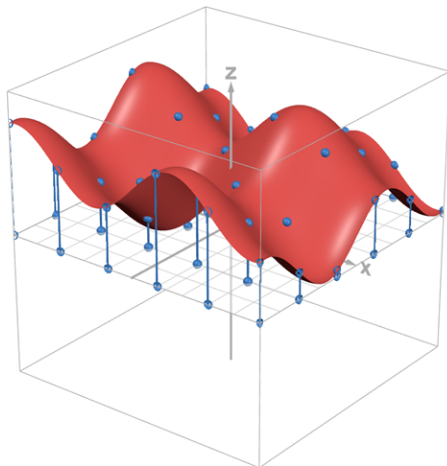
Görbe érintőegyenese



Felületek megadása

- ▶ Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- ▶ Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
 $\rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$
- ▶ Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- ▶ Hogyan rajzoljuk ki őket?
 - ▶ Explicit/parametrikus: pontok generálása, háromszögelés...(lásd inkrementális képszintézis, 7-9 előadás)
 - ▶ Implicit: felület metszése sugárral...(lásd sugármetszés, 5. előadás)

Explicit felületek



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

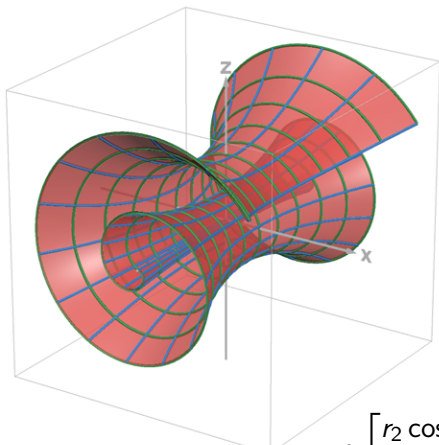
$$z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ponthalmaz:

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$$

Példa: $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + 2$

Parametrikus felületek



$$\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix},$$

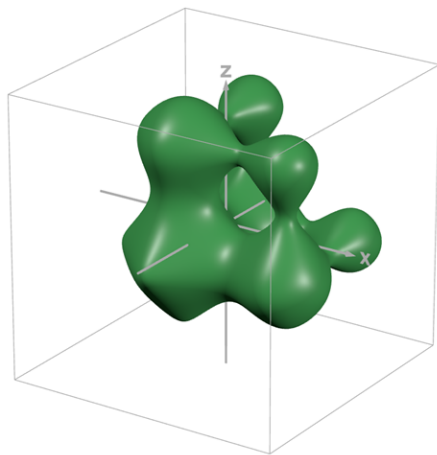
$$(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$$

Példa: $\mathbf{p}(u, v) = (1 - v)^2 \begin{bmatrix} r_2 \cos(r_1 u) u \\ -4 \\ r_2 \sin(r_1 u) u \end{bmatrix} + v^2 \begin{bmatrix} r_2 \cos(r_1 u) u \\ 4 \\ r_2 \sin(r_1 u) u \end{bmatrix}$

Implicit felületek



$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = 0$$

Ponthalmaz:

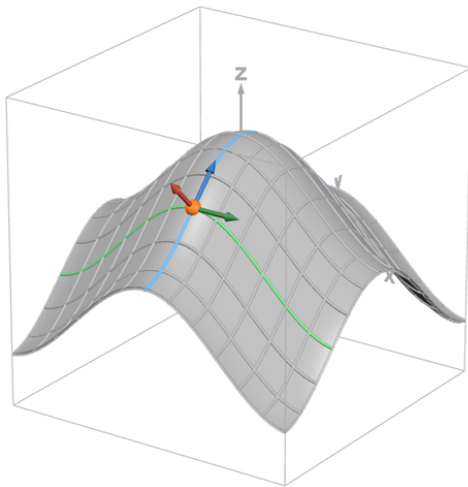
$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

Példa: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \sin 4x + \sin 4y + \sin 4z - 0.66$

Felületek felületi normálisa

- ▶ Felületi normális a felület egy pontján: a felület adott pontbeli érintősíkjának normálisa
- ▶ Ha parametrikus alakban adott a felület:
 $\mathbf{n}(u, v) = \partial_u \mathbf{p}(u, v) \times \partial_v \mathbf{p}(u, v)$
- ▶ Implicit alakban adott felületnél $\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla f$, ahol $\nabla f = [f_x, f_y, f_z]^T$
- ▶ A felület „állását” írja le lokálisan.
- ▶ Segítségével tudjuk majd meghatározni, hogy a felületi pontba beérkező fénysugarak merre haladnak tovább és ezáltal azt, hogy hogyan kell árnyalni a felületet.

Parametrikus felületek felületi normálisa



Gömb

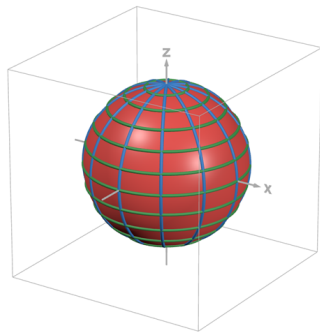
► Implicit:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2$$

► Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = r \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$



Ellipszoid

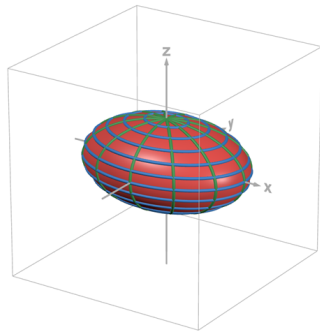
- Implicit:

$$\frac{(x-c_x)^2}{a^2} + \frac{(y-c_y)^2}{b^2} + \frac{(z-c_z)^2}{c^2} = 1$$

- Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} a \cos u \sin v \\ b \sin u \sin v \\ c \cos v \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$

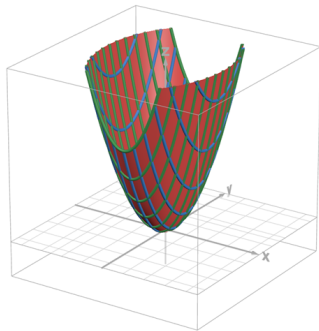


Egy egyszerű paraboloid

► Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ au^2 + bv^2 \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2$$



Amire figyelni érdemes

- ▶ Matematikában általában a felfelé mutató tengelynek a z tengelyt tekintik
- ▶ A fenti képletek is ennek megfelelően adják a „várt” képet
- ▶ Grafikában viszont sokszor az y mutat felfelé! Ez megoldható pl. az y és z koordináták felcserélésével

Jelölések

- ▶ $\mathbf{l}$ a megvilágító, a fényt „adó” pont felé mutató vektor, ekkor a beesési irány $\mathbf{v} = -\mathbf{l}$
- ▶ $\mathbf{n}$ a felületi normális
- ▶ $\mathbf{v}, \mathbf{l}, \mathbf{n}$ egységvektorok
- ▶ θ' az $\mathbf{l}$ és az $\mathbf{n}$ által bezárt szög

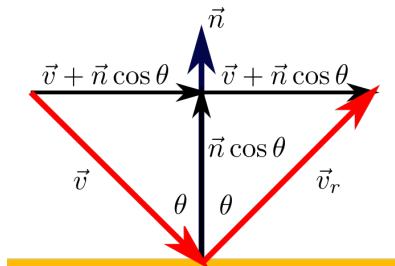
Ideális visszaverődés

Visszaverődési törvény

A beesési irány ($-\mathbf{l}$), a felületi normális ($\mathbf{n}$), és a kilépési irány ($\mathbf{r}$) egy síkban van, valamint a beesési szög (θ') megegyezik a visszaverődési szöggel (θ).

Visszaverődési irány

- ▶ Általános esetben, egy $\mathbf{v}$ beeső vektorból a visszaverődési- vagy tükörirány:
- ▶ $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$
- ▶ Mivel $\cos \theta = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, és $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$ egységnyi hosszúak.



Ideális törés

Snellius-Descartes törvény

A beesési irány ($-\mathbf{l}$), a felületi normális ($\mathbf{n}$), és a törési irány ($\mathbf{t}$) egy síkban van, valamint $\eta = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$, ahol η az anyagok relatív törésmutatója.

Relatív törésmutató

- ▶ $\eta = \frac{n_2}{n_1}$
- ▶ n_1 a közeg abszolút törésmutatója, amit a fény *elhagy*
- ▶ n_2 a közeg abszolút törésmutatója, amibe a fény *belép*

Abszolút törésmutatók

- ▶ Vákuum 1.0
- ▶ Levegő 1.0003
- ▶ Víz 1.3333
- ▶ Üveg 1.5
- ▶ Gyémánt 2.417

Törési irány

- ▶ Snellius-Descartes törvény:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- ▶ $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin \beta - \mathbf{n} \cos \beta$

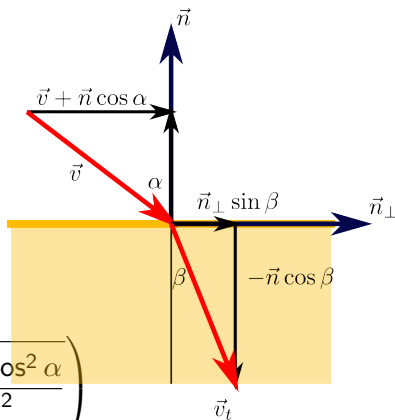
- ▶ $\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{n} \cos \alpha}{\sin \alpha}$

- ▶ $\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\eta} - \cos \beta \right)$

- ▶ $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} =$
 $\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\eta^2}}$



$$\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\eta} - \sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\eta^2}} \right)$$



Törési irány – megjegyzések

- ▶ A törésmutató és ennek megfelelően a törésirány függ a fény hullámhosszától is (lásd pl. prizmák).

$$\sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\eta^2}}$$

- ▶ Mi történik, ha a gyökjel alatt negatív az érték?
- ▶ Ezt hívjuk teljes fényvisszaverődésnek (angolul *total internal reflection*).
- ▶ Normál esetben a fény egy része tükröződik, egy része pedig visszaverődik, ilyenkor viszont teljesen visszaverődik, azaz a fény nem tudja elhagyni a közeget.
- ▶ Akkor fordulhat elő, ha $\eta < 1$, azaz $n_2 < n_1$, tehát a fény az optikailag sűrűbb közegből próbál a ritkább közegbe behatolni.