

Számítógépes Grafika

4. előadás: görbék és felületek

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík

- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek

- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Motiváció

- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni

Motiváció

- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni
- Hogyan tudjuk az egyszerűbb dolgokat leírni, mint például az egyenes vagy a sík?

Motiváció

- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni
- Hogyan tudjuk az egyszerűbb dolgokat leírni, mint például az egyenes vagy a sík?
- Elsődlegesen a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben vizsgáljuk a fenti kérdést

Görbék, felületek

- A görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.

Görbék, felületek

- A görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x)$

Görbék, felületek

- A görbét, felületet (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$

Görbék, felületek

- A görbét, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?

Görbék, felületek

- A görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

Görbék, felületek

- A görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$

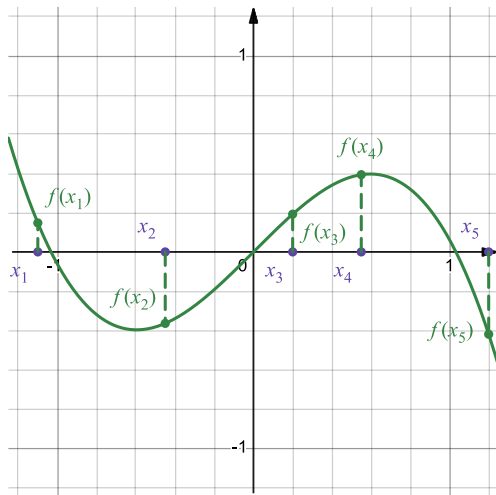
Görbék, felületek

- A görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmazznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - implicit: $f(x, y) = 0$

Görbék, felületek

- A görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmazznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_\mathbf{p} \subset \mathbb{R}\}$
 - implicit: $f(x, y) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$

Explicit görbék



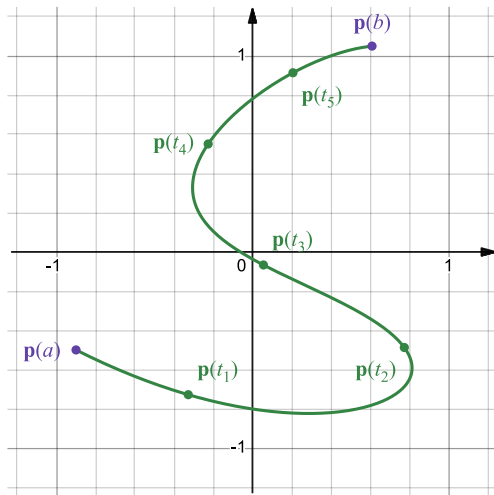
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = f(x), x \in \mathbb{R}$$

Ponthalmaz:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$$

Parametrikus görbék



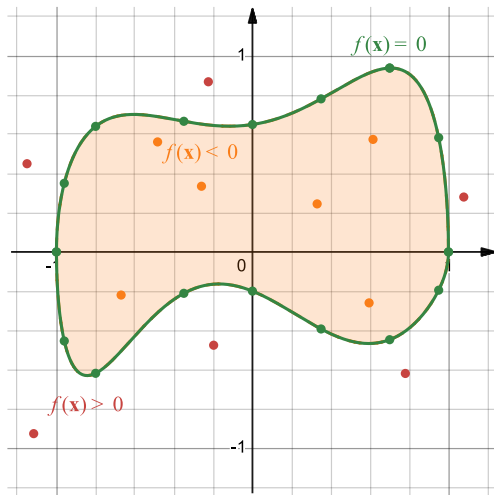
$$\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in [a, b]$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$$

Implicit görbék



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(\mathbf{x}, y) = 0$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Egyenes megadása – explicit alak

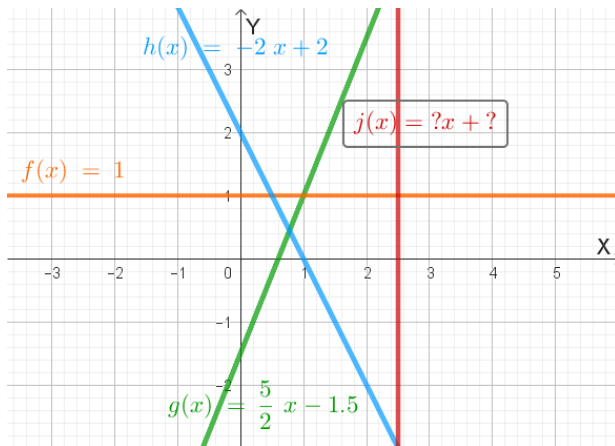
- Középiskolában: $y = mx + b$

Egyenes megadása – explicit alak

- Középiskolában: $y = mx + b$
- Probléma: mi legyen a függőleges egyenesekkel?

Egyenes megadása – explicit alak

- Középiskolában: $y = mx + b$
- Probléma: mi legyen a függőleges egyenesekkel?



Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y = 0$$

egyenletet.

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y = 0$$

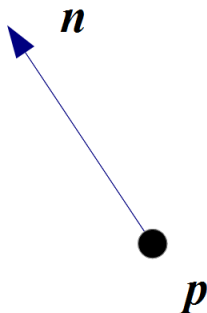
egyenletet.

- Az $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$ és $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$ az egyenesünk által meghatározott két félsík pontjainak jellemzése.

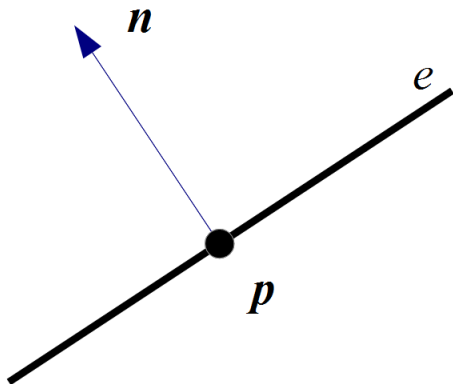
Az egyenes által meghatározott két félsík



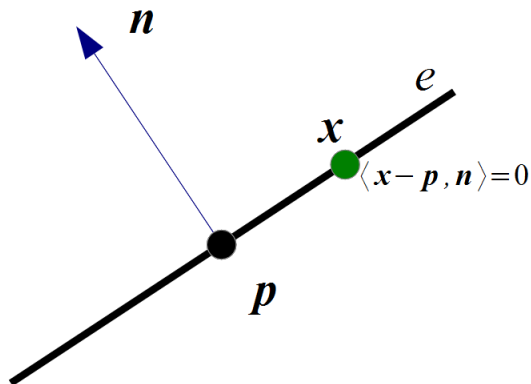
Az egyenes által meghatározott két félsík



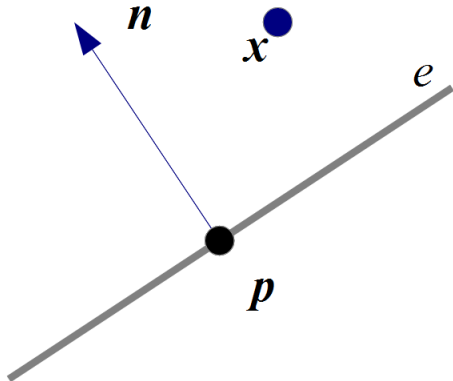
Az egyenes által meghatározott két félsík



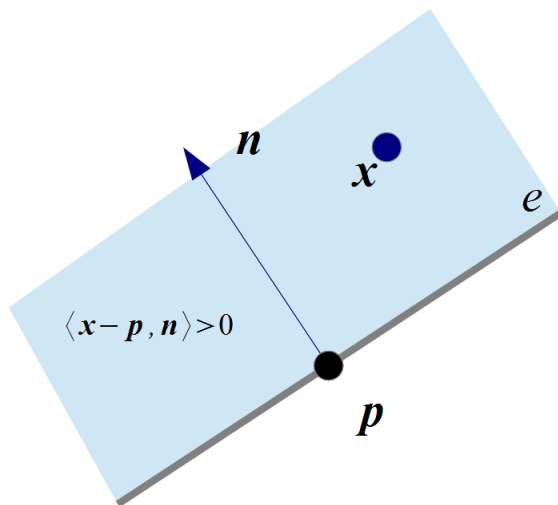
Az egyenes által meghatározott két félsík



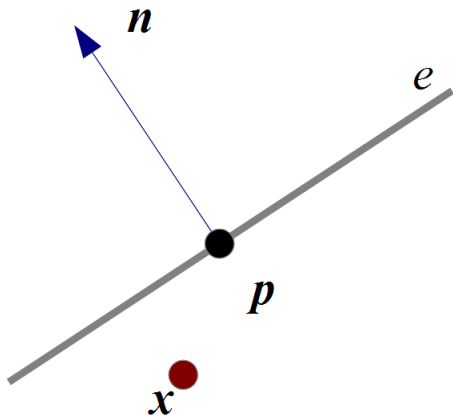
Az egyenes által meghatározott két félsík



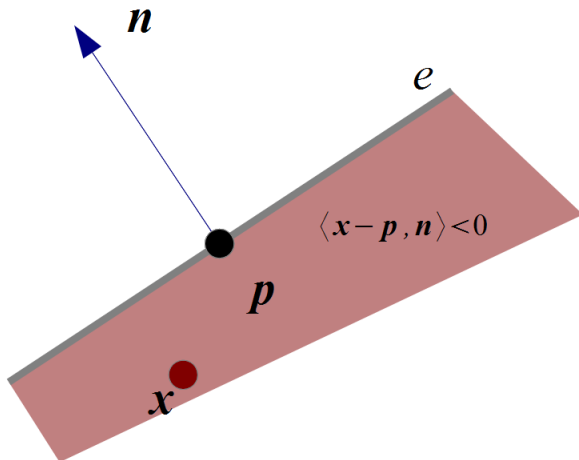
Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.

Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.
- A fentiek alapján $a = n_x$, $b = n_y$ és $c = -(p_x n_x + p_y n_y)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ választással a $\mathbf{p}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálisú egyenes implicit egyenletét kapjuk.

Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.
- A fentiek alapján $a = n_x$, $b = n_y$ és $c = -(p_x n_x + p_y n_y)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ választással a $\mathbf{p}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálisú egyenes implicit egyenletét kapjuk.
- Ha $a^2 + b^2 = 1$, akkor *Hesse-féle normalizált alakról* beszélünk – ekkor a korábbi normálvektor egység hosszúságú

A homogén egyenlet determináns alakja

- Ha az egyenesünket két, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontjával adjuk meg, akkor azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok fekszenek az egyenesen, amelyekre $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & p_x & q_x \\ y & p_y & q_y \end{vmatrix} = 0$$

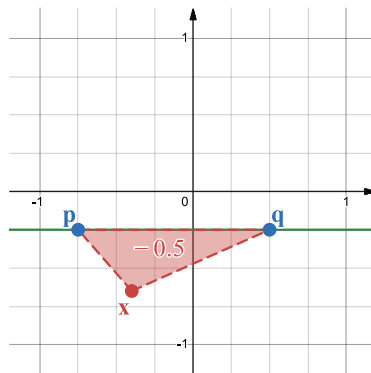
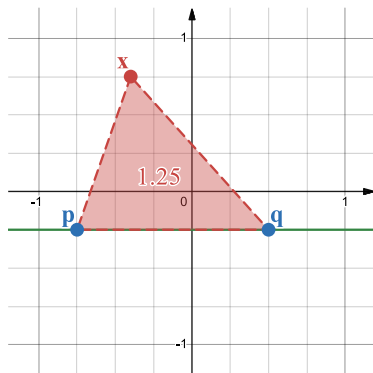
A homogén egyenlet determináns alakja

- Ha az egyenesünket két, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontjával adjuk meg, akkor azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok fekszenek az egyenesen, amelyekre $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & p_x & q_x \\ y & p_y & q_y \end{vmatrix} = 0$$

- Ahogy korábban, a determináns a három pont pontok által meghatározott háromszög előjeles területének duplája, ami egyenlő $0 \iff$ a három pont egy egyenesbe esik

A homogén egyenlet determináns alakja – ábra



Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow$$

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x(t) = p_x + tv_x$$

$$y(t) = p_y + tv_y$$

$$z(t) = p_z + tv_z$$

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

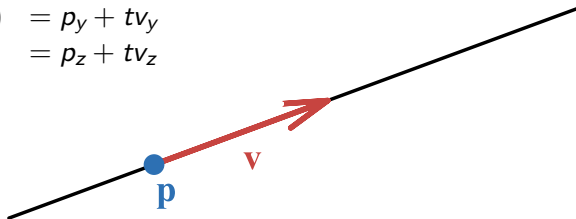
- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x(t) = p_x + tv_x$$

$$y(t) = p_y + tv_y$$

$$z(t) = p_z + tv_z$$



Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow$$

$$x(t) = (1 - t)p_x + tq_x$$

$$y(t) = (1 - t)p_y + tq_y$$

$$z(t) = (1 - t)p_z + tq_z$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

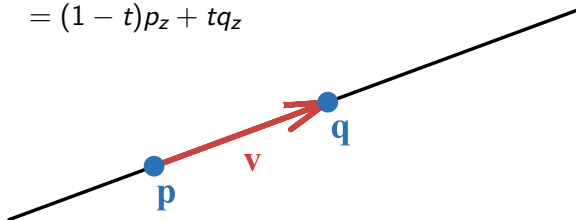
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow$$

$$\mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow$$

$$x(t) = (1 - t)p_x + tq_x$$

$$y(t) = (1 - t)p_y + tq_y$$

$$z(t) = (1 - t)p_z + tq_z$$



*Homogén koordinátás alak

- A kibővített (projektív) sík egy egyenese megadható az $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$ valós számhármassal, úgynevezett *vonalkoordinátákkal*, amelyek felhasználásával az egyenes minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ pontjára

$$\mathbf{e}\mathbf{x} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$

*Homogén koordinátás alak

- A kibővített (projektív) sík egy egyenese megadható az $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$ valós számhármassal, úgynevezett *vonalkoordinátákkal*, amelyek felhasználásával az egyenes minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ pontjára

$$\mathbf{e}\mathbf{x} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$

- Az sík minden $[x_1, x_2, 0]$ ideális pontjára illeszkedő ideális egyenes vonalkoordinátái $[0, 0, 1]$.

*Az egyenes polár-koordinátás alakja

- Az origóból induló, a polártengellyel θ szöget bezáró félegyenes polárkoordinátás (implicit) egyenlete:

$$\phi = \theta$$

*Az egyenes polár-koordinátás alakja

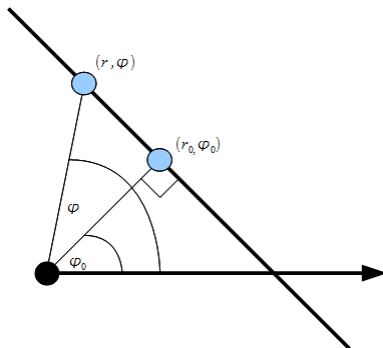
- Az origóból induló, a polártengellyel θ szöget bezáró félegyenes polárkoordinátás (implicit) egyenlete:

$$\phi = \theta$$

- Ha az egyenesünk nem halad át az origón, akkor legyen (r_0, ϕ_0) a metszéspontja az egyenesünknek és egy arra merőleges, origón áthaladó egyenesnek. Ekkor az egyenesünk polárkoordinátái közül a sugár a polárszög függvényeként felírható a következő alakban:

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\cos(\phi - \phi_0)}$$

*Az egyenes polár-koordinátás alakja



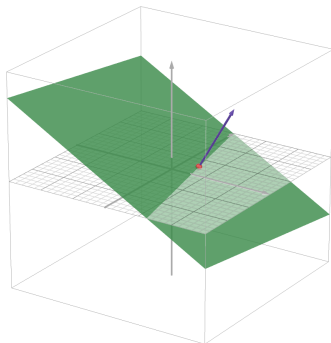
Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

A sík normálvektoros egyenlete

- A sík megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával. Ekkor a sík minden $\mathbf{x}$ pontjára:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

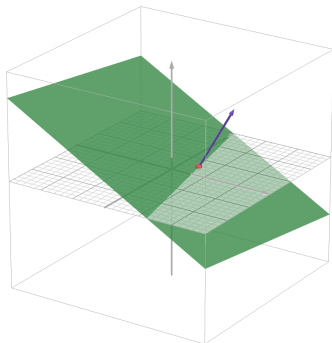


A sík normálvektoros egyenlete

- A sík megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával. Ekkor a sík minden $\mathbf{x}$ pontjára:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Félterek:
 - $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$
 - $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$



Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$

Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$
- Előbbiből $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ és $d = -n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$ választással a $\mathbf{p}$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenletét kapjuk

Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$
- Előbbiből $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ és $d = -n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$ választással a $\mathbf{p}$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenletét kapjuk
- Hesse normál-alak itt is, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

A homogén egyenlet determináns alakja

- Determináns segítségével is megadhatjuk a sík egyenletét, a következő determináns csak $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y, q_z)$, $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$ pontok által kifeszített sík $\mathbf{x}(x, y, z)$ pontjaira lesz nulla:

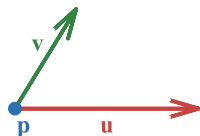
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ r_x & r_y & r_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A sík parametrikus egyenlete – kifeszítő vektorokkal

- A sík jellemezhető egy pontjával és két kifeszítő vektorával (bázisvektorával):

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

ahol $s, t \in \mathbb{R}$.

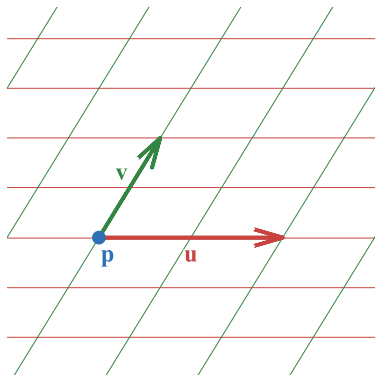


A sík parametrikus egyenlete – kifeszítő vektorokkal

- A sík jellemezhető egy pontjával és két kifeszítő vektorával (bázisvektorával):

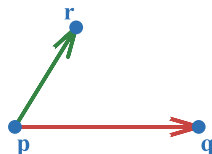
$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

ahol $s, t \in \mathbb{R}$.



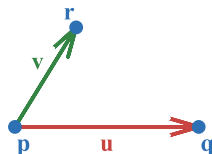
A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható $\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.



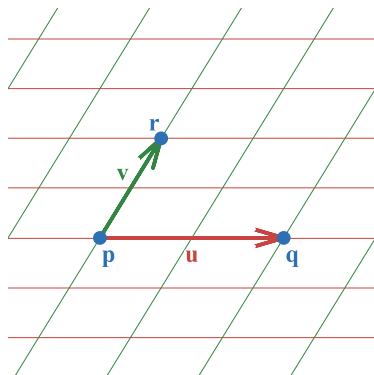
A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható
$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$$
 alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- Az előzőből: $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$,
 $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$



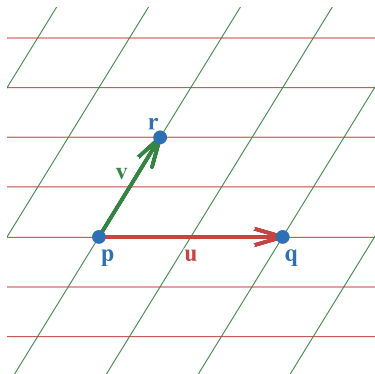
A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható $\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- Az előzőből: $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$,
 $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$



A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható $\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- Az előzőből: $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$,
 $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$
- Ez egy baricentrikus megadás:
 $\mathbf{x}(s, t) = (1 - s - t)\mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r}$
hiszen $(1 - s - t) + s + t = 1$



*Homogén koordinátás alak

- A kibővített tér egy síkja is megadható „síkkordinátákkal”, egy olyan $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3, s_4]$ négyessel, amely a sík minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ pontjára

$$\mathbf{s}\mathbf{x} = s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 0$$

*Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík

*Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátság

*Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátság
- $[0, c, 0, 0]$ az XZ koordinátság

*Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátság
- $[0, c, 0, 0]$ az XZ koordinátság
- $[0, 0, c, 0]$ az XY koordinátság

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x)$

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - implicit: $f(x, y) = 0$

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - implicit: $f(x, y) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - implicit: $f(x, y) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- De hogyan tudjuk ezeket kirajzolni?

Görbék leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
 - explicit: $y = f(x) \rightarrow \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}\}$
 - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}\}$
 - implicit: $f(x, y) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- De hogyan tudjuk ezeket kirajzolni?
 - Explicit/parametrikus: görbén pontok generálása...
 - Implicit: képernyő pontjait ellenőrizzük, hogy a görbén van-e...

Görbék transzformációja

Hogyan transzformálunk görbéket a különböző megadási módokban?

Görbék transzformációja

Hogyan transzformálunk görbéket a különböző megadási módokban?

- Explicit

- Függőleges eltolás és nyújtás: a függvényérték módosítása

$$\rightarrow y = a \cdot f(x) + b$$

- Vízszintes eltolás és nyújtás: a paraméter inverz módosítása

$$\rightarrow y = f\left(\frac{x}{c} - d\right)$$

Görbék transzformációja

Hogyan transzformálunk görbéket a különböző megadási módokban?

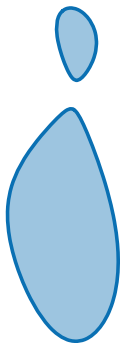
- Explicit
 - Függőleges eltolás és nyújtás: a függvényérték módosítása
 $\rightarrow y = a \cdot f(x) + b$
 - Vízszintes eltolás és nyújtás: a paraméter inverz módosítása
 $\rightarrow y = f\left(\frac{x}{c} - d\right)$
- Parametrikus: az eredménypont transzformációja
 $\rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(t)$

Görbék transzformációja

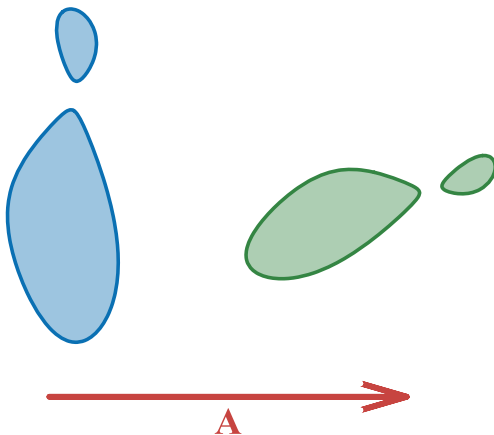
Hogyan transzformálunk görbéket a különböző megadási módokban?

- Explicit
 - Függőleges eltolás és nyújtás: a függvényérték módosítása
 $\rightarrow y = a \cdot f(x) + b$
 - Vízszintes eltolás és nyújtás: a paraméter inverz módosítása
 $\rightarrow y = f\left(\frac{x}{c} - d\right)$
- Parametrikus: az eredménypont transzformációja
 $\rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(t)$
- Implicit: a paraméter transzformációja az inverzzel
 $\rightarrow f(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{x}) = 0$

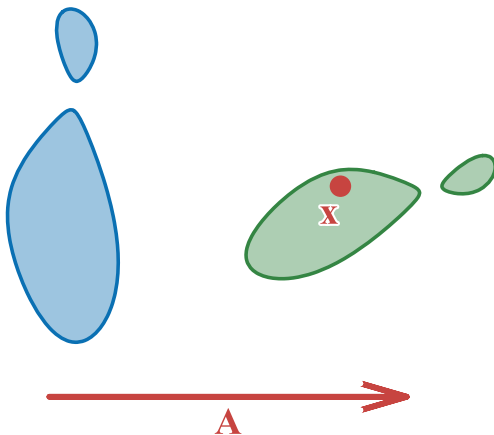
Implicit görbék transzformációja



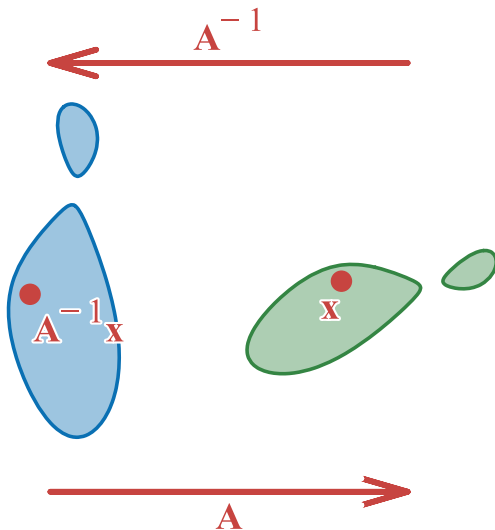
Implicit görbék transzformációja



Implicit görbék transzformációja



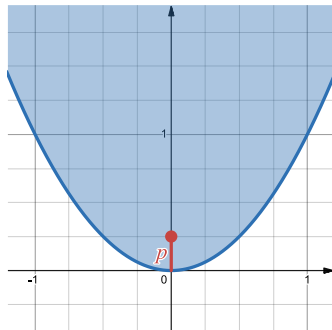
Implicit görbék transzformációja



Parabola

- Az y tengelyű, origón átmenő, $(0, p)$ fókuszpontú parabola egy
 - Implicit egyenlete:

$$x^2 = 4py$$



Parabola

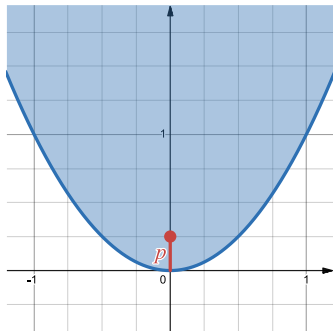
- Az y tengelyű, origón átmenő, $(0, p)$ fókuszpontú parabola egy

- Implicit egyenlete:

$$x^2 = 4py$$

- Explicit egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{4p}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Parabola

- Az y tengelyű, origón átmenő, $(0, p)$ fókuszpontú parabola egy

- Implicit egyenlete:

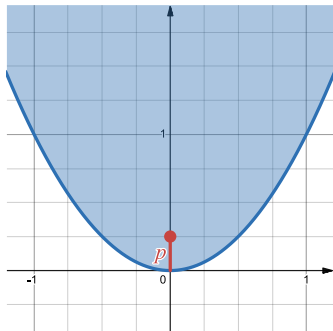
$$x^2 = 4py$$

- Explicit egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{4p}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{t^2}{4p} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Parabola

- Mi van, ha a c pontba akarjuk eltolni az origóból a parabolát?

Parabola

- Mi van, ha a c pontba akarjuk eltolni az origóból a parabolát?
- Az implicit és explicit alakban be kell vinni a (c_x, c_y) koordinátákat (pl. implicitből $(x - c_x)^2 = 4p(y - c_y)$ lesz)

Parabola

- Mi van, ha a $\mathbf{c}$ pontba akarjuk eltolni az origóból a parabolát?
- Az implicit és explicit alakban be kell vinni a (c_x, c_y) koordinátákat (pl. implicitből $(x - c_x)^2 = 4p(y - c_y)$ lesz)
- Parametrikus alakban egyszerűen $\mathbf{p}(t) + \mathbf{c}$ lesz az új alak.

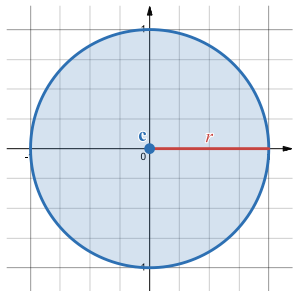
Kör

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, r sugarú kör egy

Kör

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, r sugarú kör egy
- Implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$$

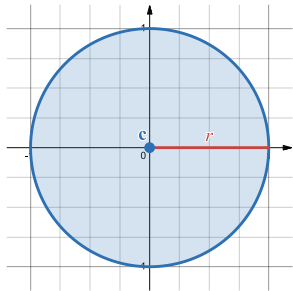


Kör

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, r sugarú kör egy
- Implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$$

- Explicit alakban nem tudjuk az egész kört leírni egy függvénnyel (DE két darabban menne, pl. $\mathbf{c} = \mathbf{0}, r = 1$ mellett $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, ahol $x \in [-1, 1]$)



Kör

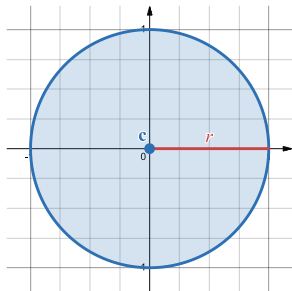
- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, r sugarú kör egy

- Implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$$

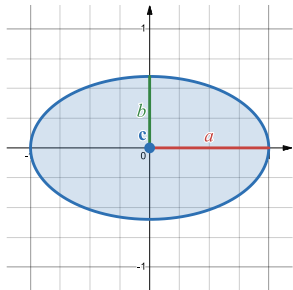
- Explicit alakban nem tudjuk az egész kört leírni egy függvénnyel (DE két darabban menne, pl. $\mathbf{c} = \mathbf{0}, r = 1$ mellett $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, ahol $x \in [-1, 1]$)
- Parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = r \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \mathbf{c}, \text{ ahol } t \in [0, 2\pi)$$



Ellipszis

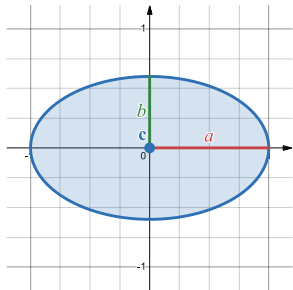
- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, nagytengelyével az x tengellyel párhuzamos, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egy



Ellipszis

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, nagytengelyével az x tengellyel párhuzamos, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egy
 - Implicit egyenlete:

$$\frac{(x - c_x)^2}{a^2} + \frac{(y - c_y)^2}{b^2} = 1$$

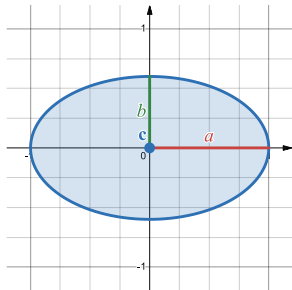


Ellipszis

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, nagytengelyével az x tengellyel párhuzamos, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egy
 - Implicit egyenlete:

$$\frac{(x - c_x)^2}{a^2} + \frac{(y - c_y)^2}{b^2} = 1$$

- Explicit alakban ugyanaz a probléma, mint a körnél (lásd előbb)



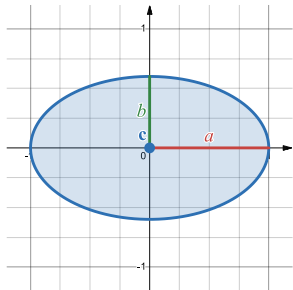
Ellipszis

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, nagytengelyével az x tengellyel párhuzamos, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egy
 - Implicit egyenlete:

$$\frac{(x - c_x)^2}{a^2} + \frac{(y - c_y)^2}{b^2} = 1$$

- Explicit alakban ugyanaz a probléma, mint a körnél (lásd előbb)
- Parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{bmatrix} + \mathbf{c}, \text{ ahol } t \in [0, 2\pi)$$



Ellipszis

- De mi van, ha nem akarjuk, hogy x, y tengellyel párhuzamosak legyenek a tengelyeink?
 - Implicit egyenlet: ez munkás(nak tűnik és habár nem az, de), nekünk most nem kell...

Ellipszis

- De mi van, ha nem akarjuk, hogy x, y tengellyel párhuzamosak legyenek a tengelyeink?
 - Implicit egyenlet: ez munkás(nak tűnik és habár nem az, de), nekünk most nem kell...
 - Parametrikus egyenlete: báziscsere! Ha az új tengelyek $\mathbf{k}, \mathbf{l}$, akkor $\mathbf{p}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{k} + b \sin t \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c}$, ahol $t \in [0, 2\pi)$

Szakasz

- Legyen adott két pont, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$. A két ponton átmenő egyenes parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$.

- Ha $t \in [0, 1]$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ pontokat összekötő egyenes szakaszt kapjuk.

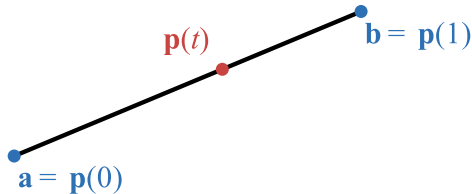
Szakasz

- Legyen adott két pont, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$. A két ponton átmenő egyenes parametrikus egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$.

- Ha $t \in [0, 1]$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ pontokat összekötő egyenes szakaszt kapjuk.



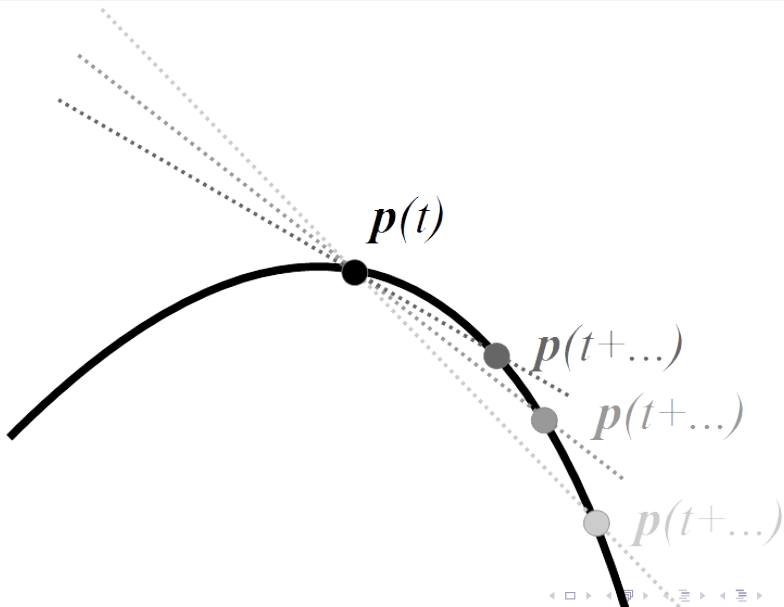
Görbék parametrikus alakja

- Deriváltak: $\mathbf{p}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} x^{(i)}(t) \\ y^{(i)}(t) \end{bmatrix}, t \in [...], i = 0, 1, 2, \dots$

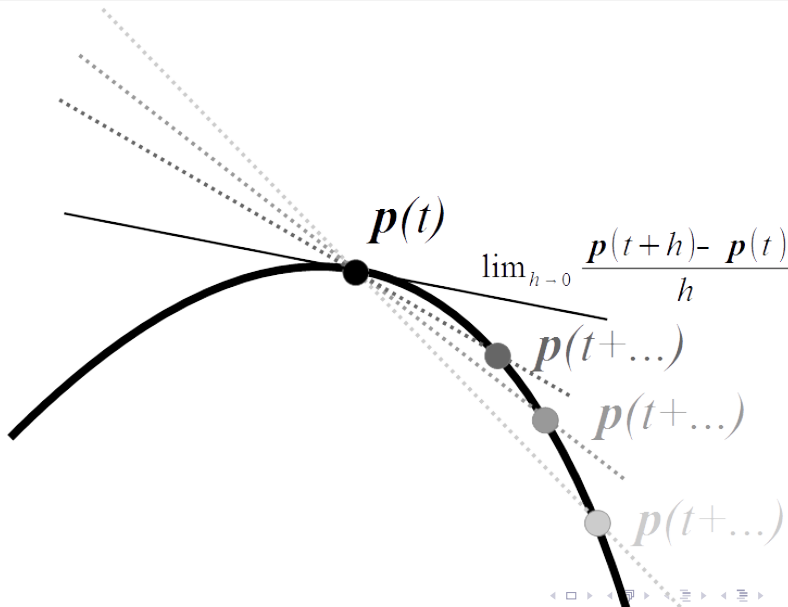
Görbék parametrikus alakja

- Deriváltak: $\mathbf{p}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} x^{(i)}(t) \\ y^{(i)}(t) \end{bmatrix}, t \in [...], i = 0, 1, 2, \dots$
- Ha a görbét egy mozgó pont pályájának tekintjük, akkor az első derivált a sebességnek tekinthető, a második a gyorsulásnak stb.

Görbe érintőegyenese



Görbe érintőegyenese



Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y)$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
 $\rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
 $\rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
 $\rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$

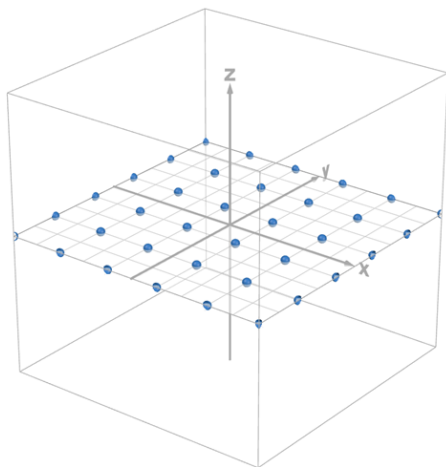
Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
 $\rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- Hogyan rajzoljuk ki őket?

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \rightarrow \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
 $\rightarrow \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \rightarrow \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- Hogyan rajzoljuk ki őket?
 - Explicit/parametrikus: pontok generálása, háromszögelés...(lásd inkrementális képszintézis, 7-9 előadás)
 - Implicit: felület metszése sugárral...(lásd sugármetszés, 5. előadás)

Explicit felületek



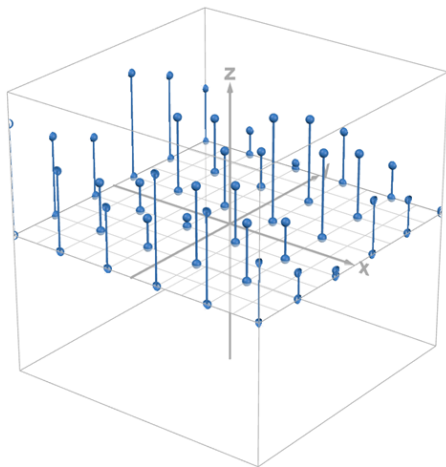
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ponthalmaz:

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$$

Explicit felületek



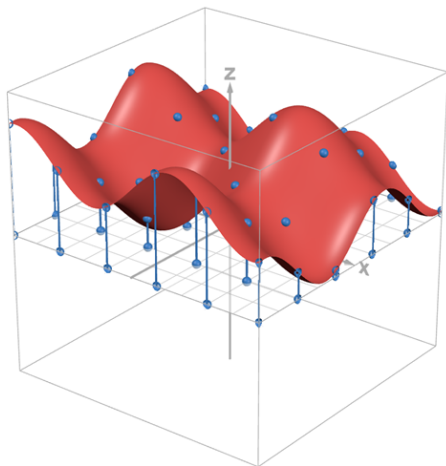
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ponthalmaz:

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$$

Explicit felületek



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

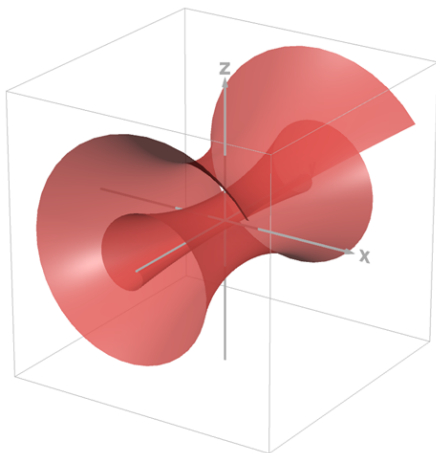
$$z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ponthalmaz:

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2\}$$

Példa: $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + 2$

Parametrikus felületek



$$\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

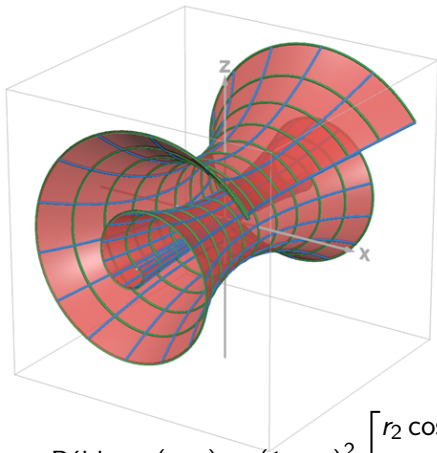
$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix},$$

$$(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$$

Parametrikus felületek



$$\mathbf{p} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix},$$

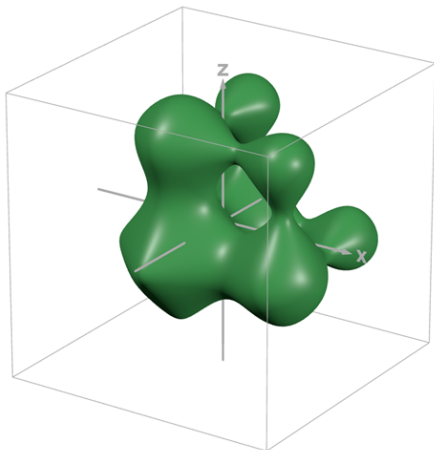
$$(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{Példa: } \mathbf{p}(u, v) = (1 - v)^2 \begin{bmatrix} r_2 \cos(r_1 u) u \\ -4 \\ r_2 \sin(r_1 u) u \end{bmatrix} + v^2 \begin{bmatrix} r_2 \cos(r_1 u) u \\ 4 \\ r_2 \sin(r_1 u) u \end{bmatrix}$$

Implicit felületek



$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

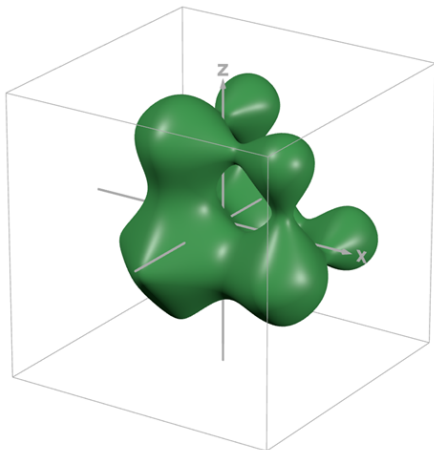
$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = 0$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

Implicit felületek



$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f(\mathbf{x}, y, z) = 0$$

Ponthalmaz:

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

Példa: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \sin 4x + \sin 4y + \sin 4z - 0.66$

Felületek felületi normálisa

- Felületi normális a felület egy pontján: a felület adott pontbeli érintősíkjának normálisa

Felületek felületi normálisa

- Felületi normális a felület egy pontján: a felület adott pontbeli érintősíkjának normálisa
- Ha parametrikus alakban adott a felület:
$$\mathbf{n}(u, v) = \partial_u \mathbf{p}(u, v) \times \partial_v \mathbf{p}(u, v)$$

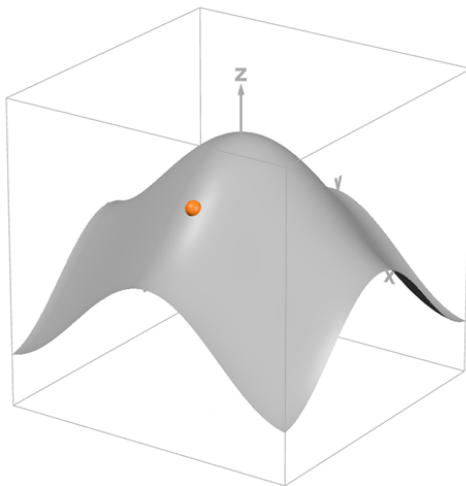
Felületek felületi normálisa

- Felületi normális a felület egy pontján: a felület adott pontbeli érintősíkjának normálisa
- Ha parametrikus alakban adott a felület:
 $\mathbf{n}(u, v) = \partial_u \mathbf{p}(u, v) \times \partial_v \mathbf{p}(u, v)$
- Implicit alakban adott felületnél $\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla f$, ahol
 $\nabla f = [f_x, f_y, f_z]^T$

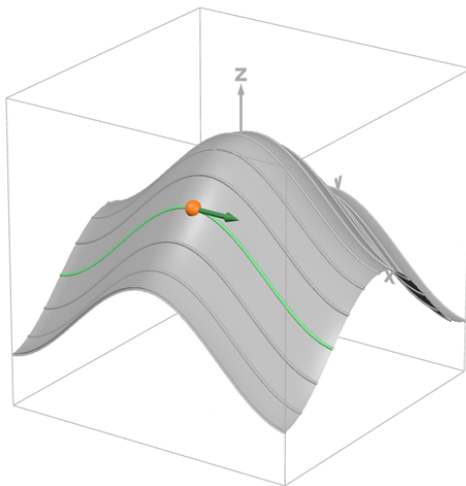
Felületek felületi normálisa

- Felületi normális a felület egy pontján: a felület adott pontbeli érintősíkjának normálisa
- Ha parametrikus alakban adott a felület:
 $\mathbf{n}(u, v) = \partial_u \mathbf{p}(u, v) \times \partial_v \mathbf{p}(u, v)$
- Implicit alakban adott felületnél $\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla f$, ahol
 $\nabla f = [f_x, f_y, f_z]^T$
- A felület „állását” írja le lokálisan.
- Segítségével tudjuk majd meghatározni, hogy a felületi pontba beérkező fénysugarak merre haladnak tovább és ezáltal azt, hogy hogyan kell árnyalni a felületet.

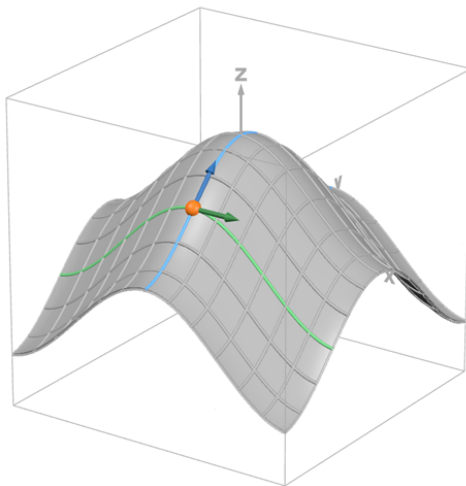
Parametrikus felületek felületi normálisa



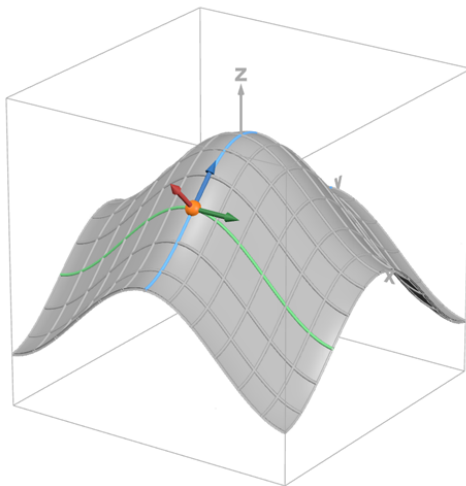
Parametrikus felületek felületi normálisa



Parametrikus felületek felületi normálisa



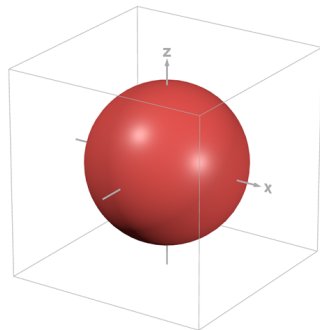
Parametrikus felületek felületi normálisa



Gömb

- Implicit:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2$$



Gömb

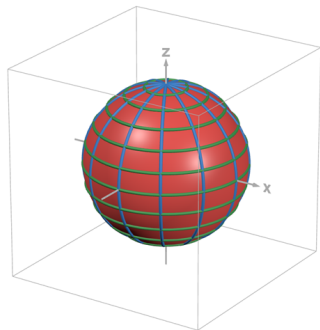
- Implicit:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2$$

- Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = r \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

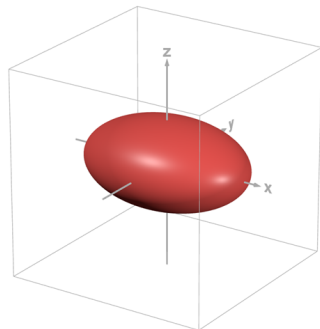
$$(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$



Ellipszoid

- Implicit:

$$\frac{(x-c_x)^2}{a^2} + \frac{(y-c_y)^2}{b^2} + \frac{(z-c_z)^2}{c^2} = 1$$



Ellipszoid

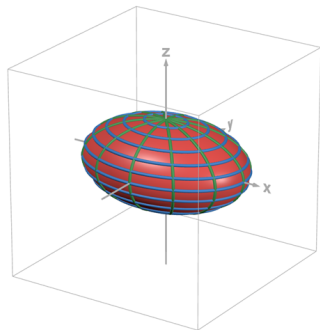
- Implicit:

$$\frac{(x-c_x)^2}{a^2} + \frac{(y-c_y)^2}{b^2} + \frac{(z-c_z)^2}{c^2} = 1$$

- Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} a \cos u \sin v \\ b \sin u \sin v \\ c \cos v \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$

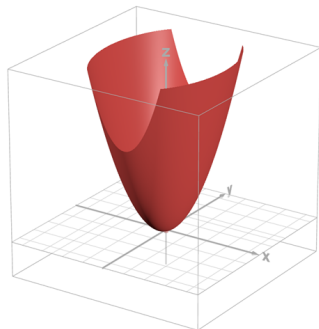


Egy egyszerű paraboloid

- Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ au^2 + bv^2 \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2$$

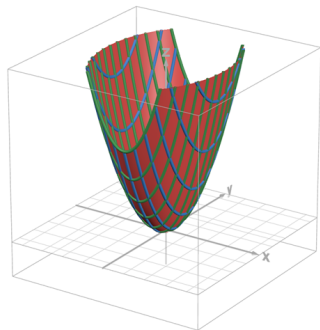


Egy egyszerű paraboloid

- Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ au^2 + bv^2 \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2$$



Amire figyelni érdemes

- Matematikában általában a felfelé mutató tengelynek a z tengelyt tekintik

Amire figyelni érdemes

- Matematikában általában a felfelé mutató tengelynek a z tengelyt tekintik
- A fenti képletek is ennek megfelelően adják a „várt” képet

Amire figyelni érdemes

- Matematikában általában a felfelé mutató tengelynek a z tengelyt tekintik
- A fenti képletek is ennek megfelelően adják a „várt” képet
- Grafikában viszont sokszor az y mutat felfelé! Ez megoldható pl. az y és z koordináták felcserélésével

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Jelölések

- $\mathbf{l}$ a megvilágító, a fényt „adó” pont felé mutató vektor, ekkor a beesési irány $\mathbf{v} = -\mathbf{l}$
- $\mathbf{n}$ a felületi normális
- $\mathbf{v}, \mathbf{l}, \mathbf{n}$ egységvektorok
- θ' az $\mathbf{l}$ és az $\mathbf{n}$ által bezárt szög

Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

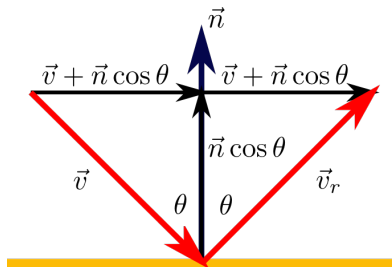
Ideális visszaverődés

Visszaverődési törvény

A beesési irány ($-\mathbf{l}$), a felületi normális ($\mathbf{n}$), és a kilépési irány ($\mathbf{r}$) egy síkban van, valamint a beesési szög (θ') megegyezik a visszaverődési szöggel (θ).

Visszaverődési irány

- Általános esetben, egy $\mathbf{v}$ beeső vektorból a visszaverődési- vagy tükörirány:
- $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$
- Mivel $\cos \theta = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, és $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$ egységnyi hosszúak.



Tartalom

- 1 Egyenesek és síkok leírása
 - Áttekintés
 - Egyenes
 - Sík
- 2 Egyszerű görbék és felületek
 - Görbék
 - Felületek
- 3 A fény útja
 - Ideális tükröződés
 - Ideális törés

Ideális törés

Snellius-Descartes törvény

A beesési irány ($-\mathbf{l}$), a felületi normális ($\mathbf{n}$), és a törési irány ($\mathbf{t}$) egy síkban van, valamint $\eta = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$, ahol η az anyagok relatív törésmutatója.

Ideális törés

Snellius-Descartes törvény

A beesési irány ($-\mathbf{l}$), a felületi normális ($\mathbf{n}$), és a törési irány ($\mathbf{t}$) egy síkban van, valamint $\eta = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$, ahol η az anyagok relatív törésmutatója.

Relatív törésmutató

- $\eta = \frac{n_2}{n_1}$
- n_1 a közeg abszolút törésmutatója, amit a fény *el*hagy
- n_2 a közeg abszolút törésmutatója, amibe a fény *be*lép

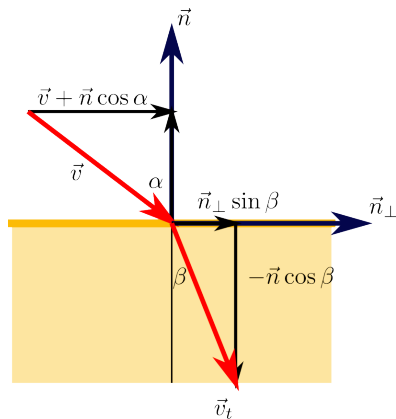
Abszolút törésmutatók

- Vákuum 1.0
- Levegő 1.0003
- Víz 1.3333
- Üveg 1.5
- Gyémánt 2.417

Törési irány

- Snellius-Descartes törvény:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

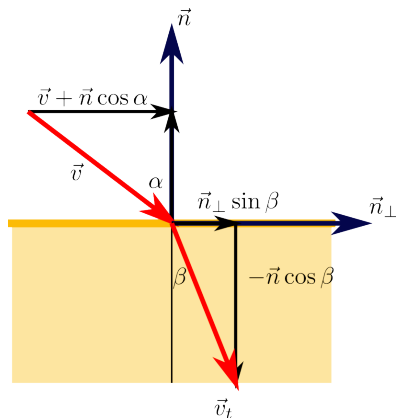


Törési irány

- Snellius-Descartes törvény:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin \beta - \mathbf{n} \cos \beta$



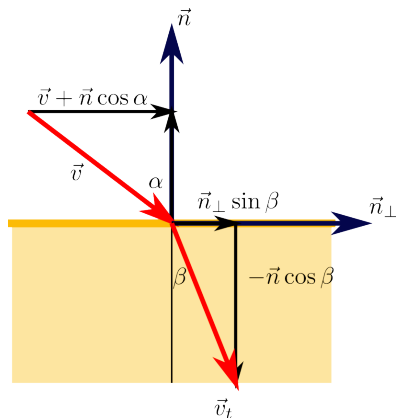
Törési irány

- Snellius-Descartes törvény:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin \beta - \mathbf{n} \cos \beta$

- $\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{n} \cos \alpha}{\sin \alpha}$



Törési irány

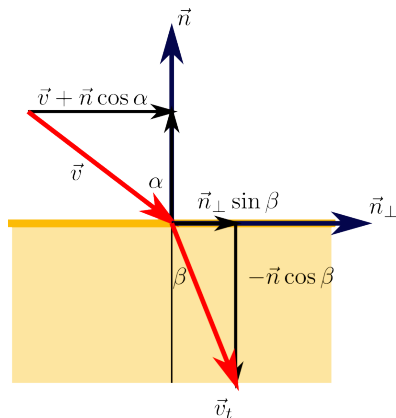
- Snellius-Descartes törvény:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin \beta - \mathbf{n} \cos \beta$

- $\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{n} \cos \alpha}{\sin \alpha}$

- $\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\eta} - \cos \beta \right)$



Törési irány

- Snellius-Descartes törvény:

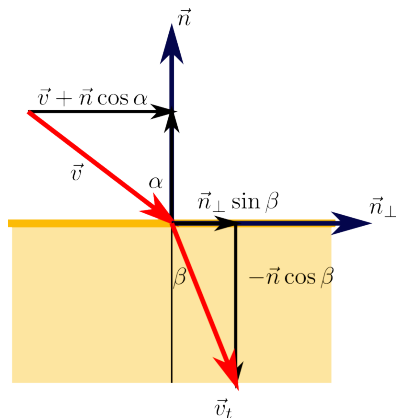
$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin \beta - \mathbf{n} \cos \beta$

- $\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{n} \cos \alpha}{\sin \alpha}$

- $\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\eta} - \cos \beta \right)$

- $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\eta^2}}$



Törési irány

- Snellius-Descartes törvény:

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin \beta - \mathbf{n} \cos \beta$

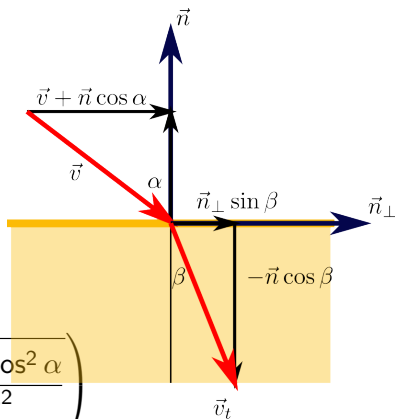
- $\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{n} \cos \alpha}{\sin \alpha}$

- $\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\eta} - \cos \beta \right)$

- $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} =$
 $\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\eta^2}}$

-

$$\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n} \left(\frac{\cos \alpha}{\eta} - \sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\eta^2}} \right)$$



Törési irány – megjegyzések

- A törésmutató és ennek megfelelően a törésirány függ a fény hullámhosszától is (lásd pl. prizmák).

Törési irány – megjegyzések

- A törésmutató és ennek megfelelően a törésirány függ a fény hullámhosszától is (lásd pl. prizmák).

$$\sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\eta^2}}$$

- Mi történik, ha a gyökjel alatt negatív az érték?
- Ezt hívjuk teljes fényvisszaverődésnek (angolul *total internal reflection*).
- Normál esetben a fény egy része tükröződik, egy része pedig visszaverődik, ilyenkor viszont teljesen visszaverődik, azaz a fény nem tudja elhagyni a közeget.
- Akkor fordulhat elő, ha $\eta < 1$, azaz $n_2 < n_1$, tehát a fény az optikailag sűrűbb közegből próbál a ritkább közegbe behatolni.