

Számítógépes Grafika

3. előadás: transzformációk

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...)

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) → az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) → az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) → az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.
- A virtuális világunkból egy kétdimenziós képet is elő kell állítanunk

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) → az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.
- A virtuális világunkból egy kétdimenziós képet is elő kell állítanunk
- → A fenti lépésekhez mind szükségünk lesz *geometriai transzformációkra*, amelyekkel az alakzatainkat megváltoztathatjuk

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 **Transzformációk**
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 **Transzformációk**
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Transzformációk

- Az elvárásaink

Transzformációk

- Az elvárásaink
 - minden pontot lehessen transzformálni

Transzformációk

- Az elvárásaink
 - minden pontot lehessen transzformálni
 - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík

Transzformációk

- Az elvárásaink
 - minden pontot lehessen transzformálni
 - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík
 - illeszkedést tartsa

Transzformációk

- Az elvárásaink
 - minden pontot lehessen transzformálni
 - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík
 - illeszkedést tartsa
 - legyen egyértelmű és egyértelműen megfordítható

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk → a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk $\rightarrow$ a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek
- A továbbiakban azonosítsuk az Euklideszi tér, $\mathbb{E}^3$ (vagy sík, $\mathbb{E}^2$) elemeit a $\mathbb{R}^3$ (vagy $\mathbb{R}^2$) valós vektorterünk elemeivel

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk $\rightarrow$ a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek
- A továbbiakban azonosítsuk az Euklideszi tér, $\mathbb{E}^3$ (vagy sík, $\mathbb{E}^2$) elemeit a $\mathbb{R}^3$ (vagy $\mathbb{R}^2$) valós vektorterünk elemeivel
- Ehhez rögzítünk egy $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^3$ pontot, origót, és minden $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^3$ ponthoz a $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{o}$ vektort (helyvektor) rendeljük

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
 - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
 - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)
 - $\phi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \phi(\mathbf{a})$ (homogén)

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
 - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)
 - $\phi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \phi(\mathbf{a})$ (homogén)
- Emlékeztető: az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéseket egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixszal fel tudjuk írni; ekkor $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Projektív és affin transzformációk – definíciók

- Az ideális síkkal kibővített euklideszi tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, pont-, egyenes-, sík-, és illeszkedést tartó leképezéseit *kollineációknak*, vagy *projektív transzformációknak* nevezzük.

Projektív és affin transzformációk – definíciók

- Az ideális síkkal kibővített euklideszi tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, pont-, egyenes-, sík-, és illeszkedést tartó leképezéseit *kollineációknak*, vagy *projektív transzformációknak* nevezzük.
- Affin transzformációk a projektív transzformációknak az az alcsoportja, amelyek a (kibővített) tér „közönséges”, euklideszi részét önmagára képezik le, és az ideális síkot is önmagára képezi le.

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével → ez mit jelent?

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
 - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
 - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
 - létezik egységelem (egységtranszformáció)

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
 - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
 - létezik egységelem (egységtranszformáció)
 - a dimenziótartó transzformációknak van inverze (vissza lehet csinálni)

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
 - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
 - létezik egységelem (egységtranszformáció)
 - a dimenziótartó transzformációknak van inverze (vissza lehet csinálni)
- Figyeljünk: a csoport nem kommutatív

Tulajdonságok

- Az affin transzformációk a párhuzamosságot megtartják
- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
 - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
 - létezik egységelem (egységtranszformáció)
 - a dimenziótartó transzformációknak van inverze (vissza lehet csinálni)
- Figyeljünk: a csoport nem kommutatív
 - azaz a legtöbb esetben a műveletek nem felcserélhetők!

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk megadhatóak egy lineáris transzformáció és egy eltolás segítségével, azaz ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ affin transzformáció, akkor létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ -ra

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk megadhatóak egy lineáris transzformáció és egy eltolás segítségével, azaz ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ affin transzformáció, akkor létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ -ra

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

- A mátrix-vektor szorzást ilyen sorrendben végezzük el, azaz: a mátrix a bal-, a vektor a jobb oldalon áll

Affin transzformációk tulajdonságai

- A $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ megadás homogén koordináták segítségével egyetlen mátrix-vektor szorzással is felírható:

Affin transzformációk tulajdonságai

- A $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ megadás homogén koordináták segítségével egyetlen mátrix-vektor szorzással is felírható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ [0, 0, 0] & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- A $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ megadás homogén koordináták segítségével egyetlen mátrix-vektor szorzással is felírható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ [0, 0, 0] & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

- Ugyanis ekkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ [0, 0, 0] & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot 1 \\ \mathbf{0} \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
- Biz.: legyenek egy tetszőleges $\mathbf{x}$ pont baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$ -kre vonatkoztatva α_i , ekkor

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right)$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
- Biz.: legyenek egy tetszőleges $\mathbf{x}$ pont baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$ -kre vonatkoztatva α_i , ekkor

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \\ &= \mathbf{A} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) + \mathbf{b}\end{aligned}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
- Biz.: legyenek egy tetszőleges $\mathbf{x}$ pont baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$ -kre vonatkoztatva α_i , ekkor

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \\ &= \mathbf{A} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A} \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{b} \qquad \text{mivel} \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1\end{aligned}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval a *baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
- Biz.: legyenek egy tetszőleges $\mathbf{x}$ pont baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$ -kre vonatkoztatva α_i , ekkor

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \\ &= \mathbf{A} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i\right) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A} \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{b} \quad \text{mivel} \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i (\mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi(\mathbf{x}_i)\end{aligned}$$

Affin transzformációk megadása

- $\mathbb{E}^n$ -ben egy affin transzformációt egyértelműen meghatároz $n + 1$ általános állású pont és annak képe

Affin transzformációk megadása

- $\mathbb{E}^n$ -ben egy affin transzformációt egyértelműen meghatároz $n + 1$ általános állású pont és annak képe
- Azaz, például síkban ha adott három általános állású

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2$$

pont (homogén koordinátákkal) és ezek képei, rendre

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2$$

akkor $\mathbf{p}_i$ -ket $\mathbf{q}_i$ -kbe átvivő $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ transzformációra

$$\mathbf{R} \cdot [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \Rightarrow \mathbf{R} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \cdot [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]^{-1}$$

Projektív transzformációk megadása

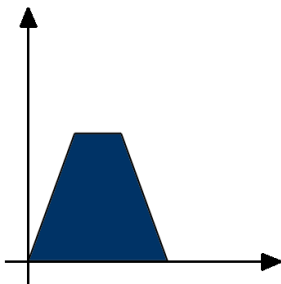
- $\mathbb{E}^n$ -ben egy projektív transzformációt egyértelműen meghatároz $n + 2$ általános állású pont és annak képe

Projektív transzformációk megadása

- $\mathbb{E}^n$ -ben egy projektív transzformációt egyértelműen meghatároz $n + 2$ általános állású pont és annak képe
- Tehát síkban 4: legyen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, ekkor megoldandó $\mathbf{P}$ -re

$$\mathbf{P} \cdot [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = [\alpha_0 \mathbf{q}_0, \alpha_1 \mathbf{q}_1, \alpha_2 \mathbf{q}_2, \alpha_3 \mathbf{q}_3]$$

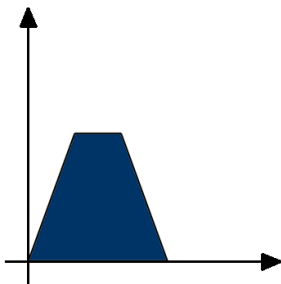
Transzformációk osztályozása



Transzformációk osztályozása

EGYBEVÁGÓSÁGOK

Egység tr.

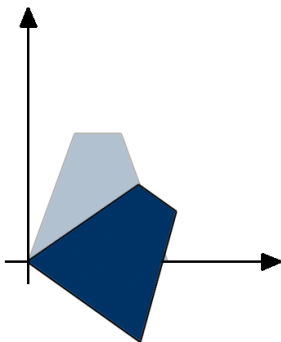


Transzformációk osztályozása

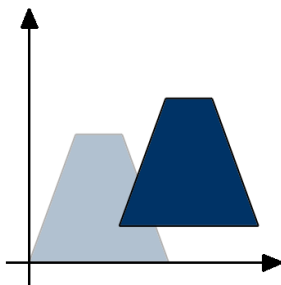
EGYBEVÁGÓSÁGOK

Egység tr.

Forgatás



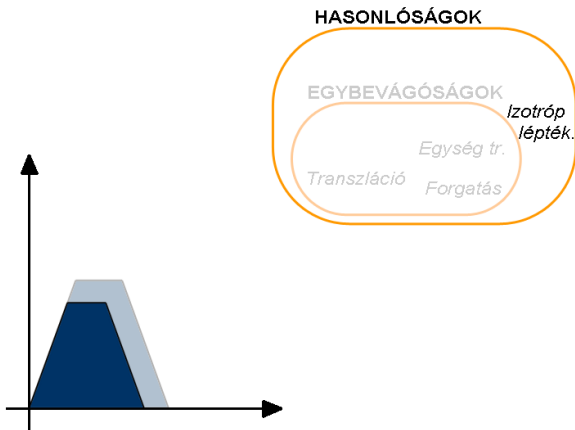
Transzformációk osztályozása



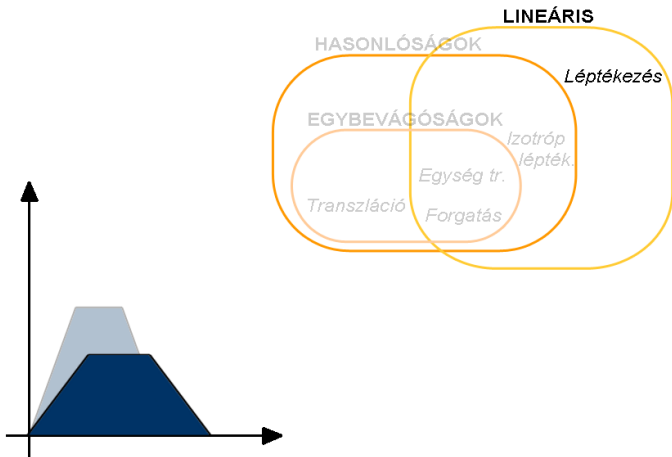
EGYBEVÁGÓSÁGOK

Egység tr.
Transzláció *Forgatás*

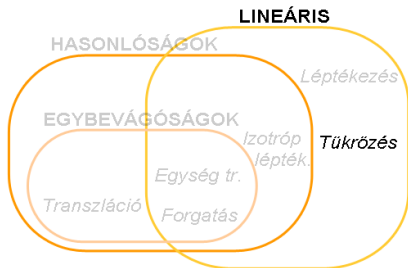
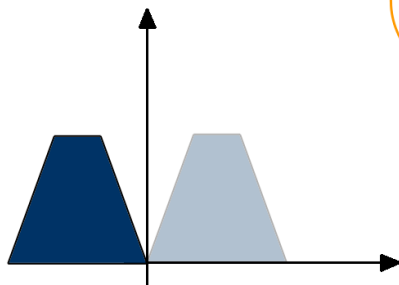
Transzformációk osztályozása



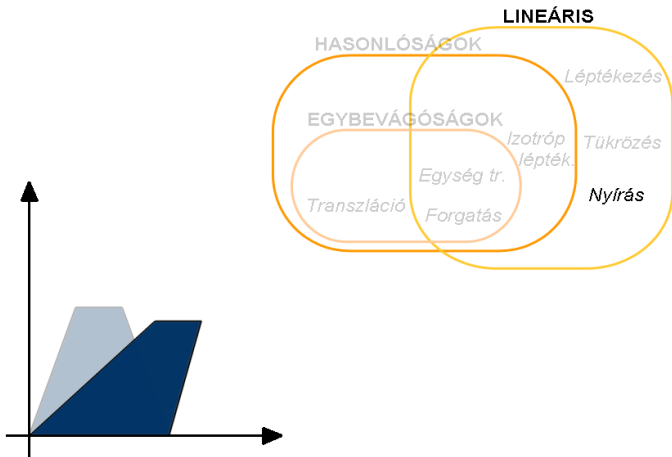
Transzformációk osztályozása



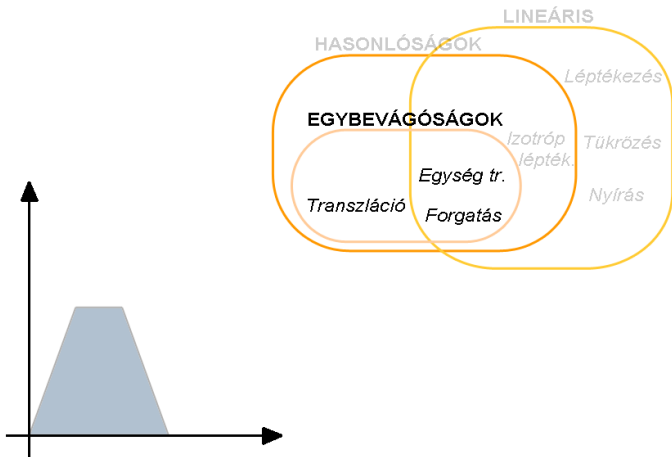
Transzformációk osztályozása



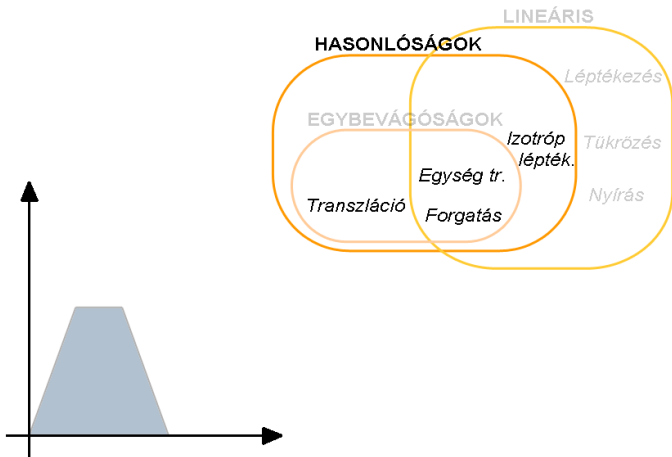
Transzformációk osztályozása



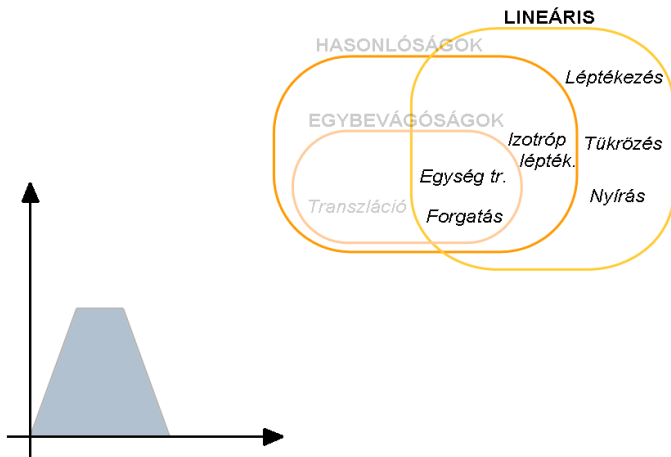
Transzformációk osztályozása



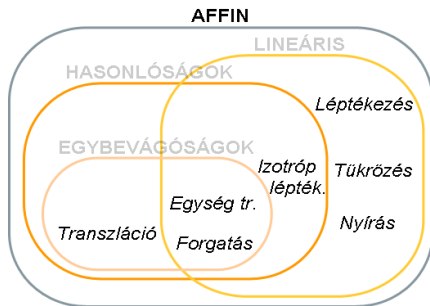
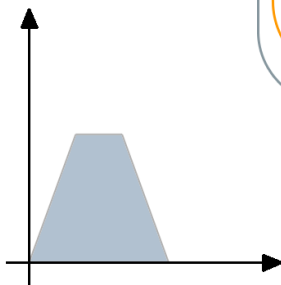
Transzformációk osztályozása



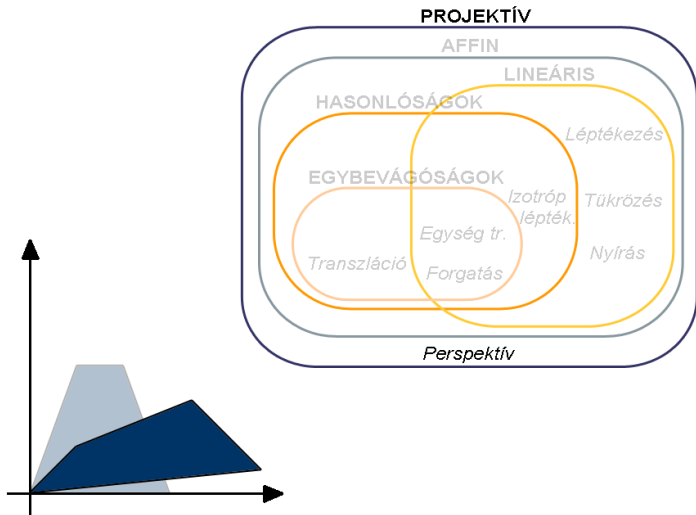
Transzformációk osztályozása



Transzformációk osztályozása



Transzformációk osztályozása



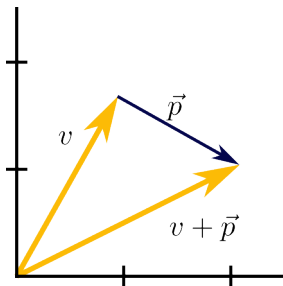
Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Eltolás



Eltolás

- Minden pontot egy adott **d** vektorral eltolunk:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

Eltolás

- Minden pontot egy adott $\mathbf{d}$ vektorral eltolunk:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

- Általában $\mathbf{T}(d_x, d_y, d_z)$ -vel jelöljük

Eltolás

- Minden pontot egy adott $\mathbf{d}$ vektorral eltolunk:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

- Általában $\mathbf{T}(d_x, d_y, d_z)$ -vel jelöljük
- Mátrix alakhoz homogén koordináták kellene, $w = 1$ választással és akkor a következő 4×4 -es mátrixszal adható meg:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eltolás

- Hiszen ha homogén koordinátáit használjuk az x pontnak, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot d_x \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot d_y \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 1 \cdot d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok

- Az eltolások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják

Tulajdonságok

- Az eltolások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A $\mathbf{T}(a, b, c)$ inverze $\mathbf{T}^{-1}(a, b, c) = \mathbf{T}(-a, -b, -c)$

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - **Forgatás**
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:

Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tengely körül) θ szöggel:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:

Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tengely körül) θ szöggel:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:

Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tengely körül) θ szöggel:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Hasonlóan kaphatjuk XZ és YZ síkokon is.

Forgatás mátrixok

Z tengely körül

$$\mathbf{R}_Z = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Y tengely körül

$$\mathbf{R}_Y = \begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

X tengely körül

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ahol $c = \cos \theta$ és $s = \sin \theta$.

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatások felírhatók egyetlen 3×3 mátrix segítségével (lineáris transzformáció)

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatások felírhatók egyetlen 3×3 mátrix segítségével (lineáris transzformáció)
- Az eltolás és forgatás sorrendje nem felcserélhető!

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatások felírhatók egyetlen 3×3 mátrix segítségével (lineáris transzformáció)
- Az eltolás és forgatás sorrendje nem felcserélhető!
- A forgatás inverze az eredeti forgatás nagyságával megegyező, de ellentétes irányú elforgatás, pl.: $\mathbf{R}_Z^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_Z(-\theta)$

Tetszőleges forgatás

Tetszőleges orientáció előállítható a három forgatás egymás utáni használatával.

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
 - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba (**T**)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
 - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
 - forgassuk be az egyik tengely körül az egyik koordinátasíkba (például $\mathbf{R}_Z$ -vel az XZ-síkba)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
 - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
 - forgassuk be az egyik tengely körül az egyik koordinátasíkba (például $\mathbf{R}_Z$ -vel az XZ -síkba)
 - ebben a síkban forgassuk a merőleges tengely körül az egyik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$ -nal az X -tengelybe)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
 - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
 - forgassuk be az egyik tengely körül az egyik koordinátasíkba (például $\mathbf{R}_Z$ -vel az XZ -síkba)
 - ebben a síkban forgassuk a merőleges tengely körül az egyik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$ -nal az X -tengelybe)
 - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$ -szel, de: ez az új (X'') tengely körül forgat!)

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
 - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
 - forgassuk be az egyik tengely körül az egyik koordinátasíkba (például $\mathbf{R}_Z$ -vel az XZ -síkba)
 - ebben a síkban forgassuk a merőleges tengely körül az egyik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$ -nal az X -tengelybe)
 - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$ -szel, de: ez az új (X'') tengely körül forgat!)
 - alkalmazzuk az eddigi transzformációk inverzeit

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
 - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
 - forgassuk be az egyik tengely körül az egyik koordinátasíkba (például $\mathbf{R}_Z$ -vel az XZ-síkba)
 - ebben a síkban forgassuk a merőleges tengely körül az egyik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$ -nal az X-tengelybe)
 - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$ -szel, de: ez az új (X'') tengely körül forgat!)
 - alkalmazzuk az eddigi transzformációk inverzeit
- Azaz például $\mathbf{M}\mathbf{x} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}_Z^{-1}\mathbf{R}_Y^{-1}\mathbf{R}_X\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_Z\mathbf{T})\mathbf{x}$

*Tetszőleges tengely körüli forgatás – Rodrigues formula

Tetszőleges *tengely* közüli forgatás megadható egy $\mathbf{z}$ egységvektorral, ami a forgatás tengelyét adja, és egy θ szöggel. Ezt írja le a *Rodrigues formula*, aminek felhasználásával:

$$\mathbf{v}' = \text{Rodrigues}(\theta, \mathbf{z})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \cos \theta + (\mathbf{z} \times \mathbf{v}) \cdot \sin \theta + \mathbf{z} \cdot \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle \cdot (1 - \cos \theta)$$

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossz tengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossz tengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Repüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossz tengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Repüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három „közönséges” tengely menti forgatást használnánk.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossz tengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Repüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három „közönséges” tengely menti forgatást használnánk.
- Csak akkor működik helyesen, ha az objektum tengelyei egybeesnek a koordináta-rendszer tengelyeivel.

Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossz tengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Repüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három „közönséges” tengely menti forgatást használnánk.
- Csak akkor működik helyesen, ha az objektum tengelyei egybeesnek a koordináta-rendszer tengelyeivel.
- Legtöbb API támogatja.

Mozgás-transzformációk

- Az eltolások és tengely körüli elforgatások kombinációjaként leírható transzformációkat *mozgás-transzformációknak* nevezzük (= egybevágósági transzformációk)

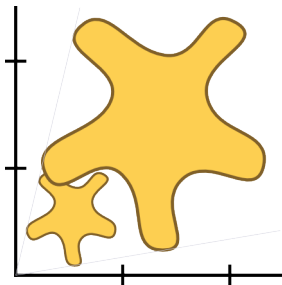
Mozgás-transzformációk

- Az eltolások és tengely körüli elforgatások kombinációjaként leírható transzformációkat *mozgás-transzformációknak* nevezzük (= egybevágósági transzformációk)
- A tárgyak alakját és méretét nem változtatják

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Méretezés



Méretezés

- Az x, y, z tengelyek mentén „széthúzzuk”, vagy „összenyomjuk” az alakzatot, azaz más *léptéket* választunk – egymástól függetlenül is akár

Méretezés

- Az x, y, z tengelyek mentén „széthúzzuk”, vagy „összenyomjuk” az alakzatot, azaz más *léptéket* választunk – egymástól függetlenül is akár
- A művelet különböző nevei: méretezés, skálázás, nyújtás, léptékezés
- Mátrix alakban:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Méretezés

- Az x, y, z tengelyek mentén „széthúzzuk”, vagy „összenyomjuk” az alakzatot, azaz más *léptéket* választunk – egymástól függetlenül is akár
- A művelet különböző nevei: méretezés, skálázás, nyújtás, léptékezés
- Mátrix alakban:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Izotróp skálázás: ha $s_x = s_y = s_z$

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
 - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
 - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
 - ha kettő negatív: tükrözés (a kimaradó) tengelyre

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
 - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
 - ha kettő negatív: tükrözés (a kimaradó) tengelyre
 - ha mindhárom negatív: középpontos tükrözés

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
 - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
 - ha kettő negatív: tükrözés (a kimaradó) tengelyre
 - ha mindhárom negatív: középpontos tükrözés
- Figyeljünk: ha páratlan számú negatív együttható van, akkor a sodrásirány is megváltozik!

Sodrásirány?

Sodrásirány?

- Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokat felhasználva, ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, akkor

$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\varphi(\mathbf{i}) + y\varphi(\mathbf{j}) + z\varphi(\mathbf{k})$$

Sodrásirány?

- Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokat felhasználva, ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, akkor

$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\varphi(\mathbf{i}) + y\varphi(\mathbf{j}) + z\varphi(\mathbf{k})$$

- $\rightarrow$ ha egy transzformáció mátrixának determinánsa negatív, akkor a sodrásirány (a tárgyak térbeli irányítása) megváltozik

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
 - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
 - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
 - ha kettő nulla: egy tengelyre „vetítünk”

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
 - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
 - ha kettő nulla: egy tengelyre „vetítünk”
 - ha mindhárom nulla: az origóba „vetítünk” mindent...

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
 - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
 - ha kettő nulla: egy tengelyre „vetítünk”
 - ha mindhárom nulla: az origóba „vetítünk” mindent...
- Észrevétel: a determináns nulla!

Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
 - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
 - ha kettő nulla: egy tengelyre „vetítünk”
 - ha mindhárom nulla: az origóba „vetítünk” mindent...
- Észrevétel: a determináns nulla! $\rightarrow$ nincs inverz!

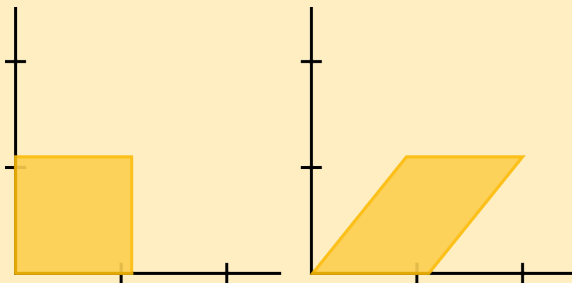
Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - **Nyírás**
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Nyírás

Példa

Ha egy pakli kártyát lerakunk az asztalra és a lapokat egyenletesen szétcsúsztatjuk, de úgy, hogy a pakli még „álló” maradjon, az a *nyírás*.



Nyírás

Ha például minden pontban az x, y értékeket z -vel arányos mértékben módosítjuk:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nyírás

Általánosan:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban?

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban? Azaz milyen x', y', z' -re teljesül, hogy $\mathbf{x} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$?

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban? Azaz milyen x', y', z' -re teljesül, hogy $\mathbf{x} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}'$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban? Azaz milyen x', y', z' -re teljesül, hogy $\mathbf{x} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban? Azaz milyen x', y', z' -re teljesül, hogy $\mathbf{x} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$
- Ortonormált mátrix inverze a mátrix transzponáltja, így az új koordinátákat adó $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1}$ mátrixunk a következő alakú

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban? Azaz milyen x', y', z' -re teljesül, hogy $\mathbf{x} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$
- Ortonormált mátrix inverze a mátrix transzponáltja, így az új koordinátákat adó $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1}$ mátrixunk a következő alakú

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ha az új origó koordinátája $\mathbf{c}$, akkor $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}(-c_x, -c_y, -c_z)$

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Kommutativitás

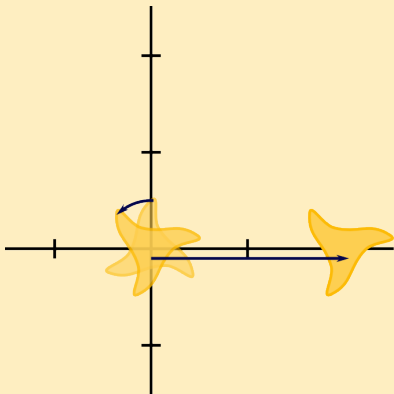
- A mátrix szorzás nem kommutatív, úgyhogy általában nem igaz, hogy

$$\mathbf{ABv} = \mathbf{BAv}$$

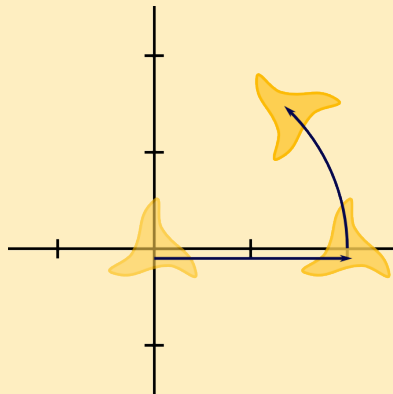
- Ez jó, mivel általában a transzformációk sem kommutatívak
- Mivel jobbról áll a vektor, így a transzformációk „jobbról balra” hajtódnak végre

Példa

Forgatás majd eltolás



Eltolás majd forgatás

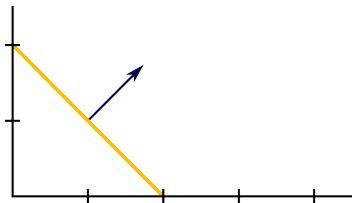


Transzformációs mátrixok determinánsai

- A méretezésnél láttuk, hogy ha egy vagy három együtthatója negatív a transzformációnak, akkor az megfordítja a sodrásirányt.
- Általános esetre megfogalmazva:
- Ha $\det(\mathbf{A}) > 0$, akkor a sodrás irány változatlan marad (pl. forgatás, eltolás, nyírás).
- Ha $\det(\mathbf{A}) < 0$, akkor a sodrás irány megfordul (pl. egyes tükrözések, jobb- és balsodrású koordináta-rendszerek között váltás)

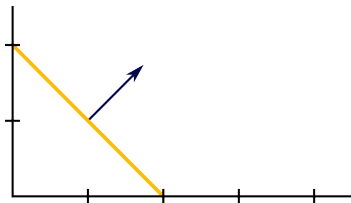
Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkban, $\mathbf{n}$ normálvektorral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtást leíró transzformáció.



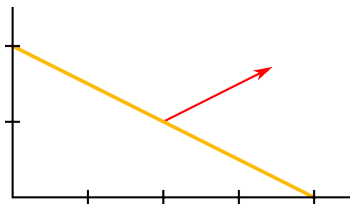
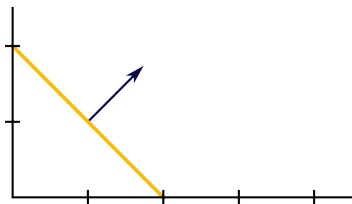
Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkban, $\mathbf{n}$ normálvektorral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtást leíró transzformáció.
- Probléma: g' -t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{S}\mathbf{n}$ lesz?



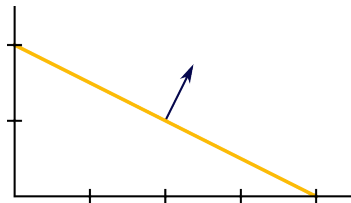
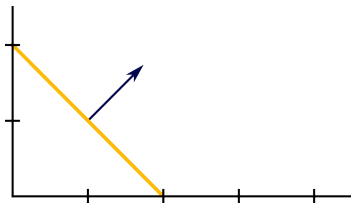
Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkban, $\mathbf{n}$ normálvektorral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtást leíró transzformáció.
- Probléma: g' -t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{S}\mathbf{n}$ lesz?
NEM!



Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkban, $\mathbf{n}$ normálvektorral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtást leíró transzformáció.
- Probléma: g' -t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{S}\mathbf{n}$ lesz?
NEM!



Normálvektorok transzformációja

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!

Normálvektorok transzformációja

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen $\mathbf{p}$ az érintősík egy pontja, ekkor $\mathbf{x}$ akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Normálvektorok transzformációja

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen $\mathbf{p}$ az érintősík egy pontja, ekkor $\mathbf{x}$ akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Ekkor tetszőleges (invertálható) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ transzformáció mellett:

$$\langle \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = 0$$

Normálvektorok transzformációja

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen $\mathbf{p}$ az érintősík egy pontja, ekkor $\mathbf{x}$ akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Ekkor tetszőleges (invertálható) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ transzformáció mellett:

$$\langle \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = 0$$

- A skaláris szorzat és a mátrix szorzás szabályai alapján kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{n} \rangle = 0$$

Normálvektorok transzformációja

- Tehát a normálvektorokat az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix helyett annak inverztranszponáltjával kell szorozni: $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{n}$.

Normálvektorok transzformációja

- Tehát a normálvektorokat az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix helyett annak inverztranszponáltjával kell szorozni: $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{n}$.
- Ha az affin transzformációban van eltolás is, azt elhagyjuk a normálvektor transzformációjánál (hiszen a vektorokra nem hat az eltolás).

Normálvektorok transzformációja

- Tehát a normálvektorokat az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix helyett annak inverztranszponáltjával kell szorozni: $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{n}$.
- Ha az affin transzformációban van eltolás is, azt elhagyjuk a normálvektor transzformációjánál (hiszen a vektorokra nem hat az eltolás).
- Azaz egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ affin transzformációnak csak a bal felső 3×3 -as lineáris részét használjuk a normálvektorhoz.

Megjegyzés

- A sík affin transzformációit egyértelműen meghatározza három független pont és azok képe

Megjegyzés

- A sík affin transzformációit egyértelműen meghatározza három független pont és azok képe
- A tér affin transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A „távolodó” párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A „távolodó” párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.
- Ez a látvány előállítható *középpontos vetítéssel*. Ez a transzformáció a *homogén térben* lineáris transzformáció.

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A „távolodó” párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.
- Ez a látvány előállítható *középpontos vetítéssel*. Ez a transzformáció a *homogén térben* lineáris transzformáció.
- Az affin transzformációk nem „bántották” az ideális elemeket, a fentiekhez azonban ez „kell”

Általános eset

- Ha egy *homogén* transzformációs mátrix utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]$, akkor az olyan *homogén lineáris transzformáció*, ami az euklidészi térnek nem lineáris transzformációja.
- Az ilyen transzformációkat nevezzük perspektív transzformációknak.
- Ekkor a párhuzamos egyenesek képe „összetart”.

Párhuzamos vetítés

- A mátrix ami megadja egyszerű, például az XY síkra való vetítés

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ez egy affin transzformáció (speciális skálázás)

Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.

Perspektív transzformáció

- Központos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.

Perspektív transzformáció

- Központos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csomagúla felel meg.

Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csomagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.

Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csongagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- A csongagúlát egy téglatestté transzformálja
- Paraméterei:

Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- A csonkagúlát egy téglatestté transzformálja
- Paraméterei:
 - a gúla függőleges nyílásszöge,

Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- A csonkagúlát egy téglatestté transzformálja
- Paraméterei:
 - a gúla függőleges nyílásszöge,
 - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,

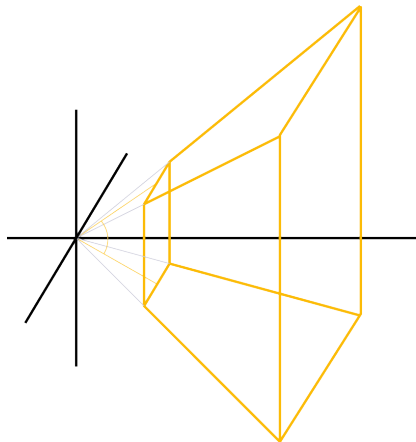
Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csongagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- A csongagúlát egy téglatestté transzformálja
- Paraméterei:
 - a gúla függőleges nyílásszöge,
 - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,
 - a közeli vágósík távolsága

Perspektív transzformáció

- Közepontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csongagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- A csongagúlát egy téglatestté transzformálja
- Paraméterei:
 - a gúla függőleges nyílásszöge,
 - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,
 - a közeli vágósík távolsága
 - a távoli vágósík távolsága

Perspektív transzformáció



Homogén osztás

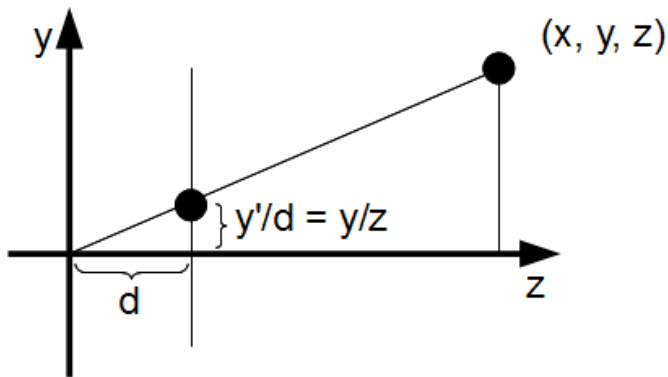
- Mivel egy $\mathbf{M}$ „valódi” projektív transzformáció (perspektív transzformáció) utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]^T$, ezért

$$[x, y, z, w]^T = \mathbf{M}\mathbf{v}$$

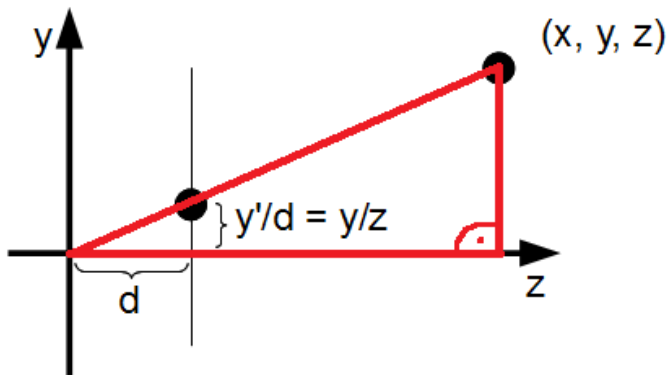
transzformáció után, $w \neq 1$ általános esetben.

- Ha ezt a pontot az eukleidészi térbe szeretnénk átvinni (mert pl. meg akarjuk jeleníteni), akkor végig kell osztanunk w -vel.
- (Persze csak akkor, ha $w \neq 0$)
- Ezt nevezzünk homogén osztásnak.

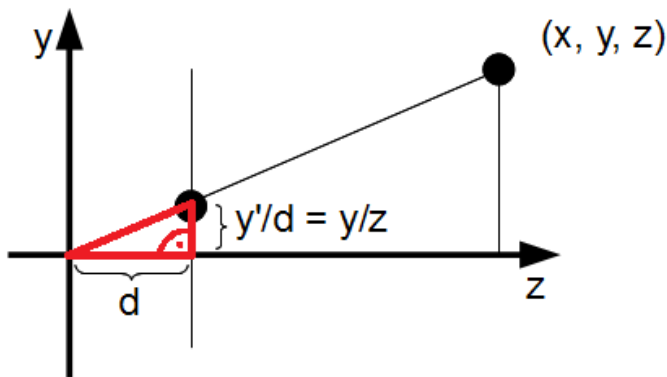
Középpontos vetítés



Középpontos vetítés



Középpontos vetítés



Középpontos vetítés

- Vagyis:

$$x' = \frac{x}{z}d, \quad y' = \frac{y}{z}d, \quad z' = \frac{z}{z}d = d$$

Középpontos vetítés

- Vagyis:

$$x' = \frac{x}{z}d, \quad y' = \frac{y}{z}d, \quad z' = \frac{z}{z}d = d$$

- Az origó, mint vetítési középpont és egy, attól a Z tengely mentén d egységre található, XY síkkal párhuzamos vetítősíkra való vetítés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

- Homogén osztás után ($\frac{z}{d}$ -vel) a fentit kapjuk

Megjegyzés

- A sík projektív transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe

Megjegyzés

- A sík projektív transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe
- A tér projektív transzformációit egyértelműen meghatározza öt független pont és azok képe

Tartalom

- 1 Motiváció
- 2 Transzformációk
 - Transzformációk általában
- 3 Nevezetes affin transzformációk
 - Eltolás
 - Forgatás
 - Méretezés
 - Nyírás
 - Áttérés új koordináta-rendszerre
 - Megjegyzések
- 4 Perspektív transzformáció
- 5 Összegzés

Transzformációs mátrixok

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \mathbf{A}: 3 \times 3 \\ \text{lineáris rész} \end{array} & \begin{array}{c} \text{eltolás} \end{array} \\ \hline \text{projektív rész} & \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?

Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?
- Az eltolás rész nem hat rá!

Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?
- Az eltolás rész nem hat rá!
- Figyeljünk: nem mindenhol szoroznak jobbról a vektorokkal!
Ha balról szeretnénk szorozni a vektorral, akkor a mátrixot transzponálni kell.

Transzformációs mátrixok

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \mathbf{A}^T: 3 \times 3 \\ \text{lineáris rész} \end{array} & \text{projektív} \\ \hline \text{eltolás rész} & \end{array} \right]$$