

Számítógépes Grafika

2. előadás: koordináta-rendszerek

Bán Róbert

`rob.ban@inf.elte.hu`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2025-2026. tavaszi félév

Tartalom

Motiváció

Koordináta-rendszerek

- Descartes koordináta-rendszer

- Polárkoordináta-rendszer

- Baricentrikus koordináták

- Homogén koordináták

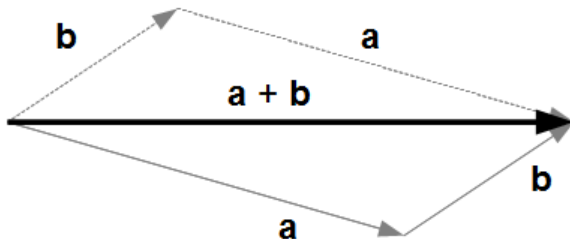
Modellezés feladata

- ▶ Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?
 - ▶ A virtuális terünk egy-egy pontját miként adjuk meg, hogyan tároljuk a számítógépen?
 - Koordináta-rendszerek
 - ▶ Az egyszerű geometriai építőelemeket (egyenes, sík, háromszög stb.) hogyan adjuk meg?
 - Pontok halmaza
 - Leírás különböző koordináta-rendszerekben

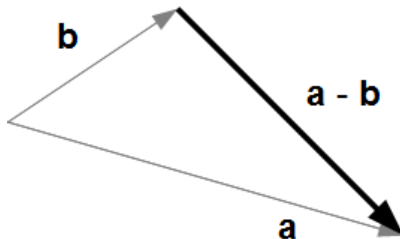
Pontok, vektorok

- ▶ Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs. Geometriailag egy *pozíció*.
- ▶ Vektor:
 - ▶ algebrailag: egy vektortér eleme.
 - ▶ geometriailag: egy eltolás, aminek *iránya* és *hossza* van
 - ▶ értelmezve vannak rá további műveletek: összeadás, kivonás, skalárral szorzás, vektoriális szorzat (eredményük vektorok), skaláris szorzat (eredménye skalár)

Vektorok összeadása



Vektorok kivonása



Vektorok skaláris szorzata

Legyen adott két vektor, $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ és $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$. Jelölje a skaláris szorzatukat $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, azaz legyen

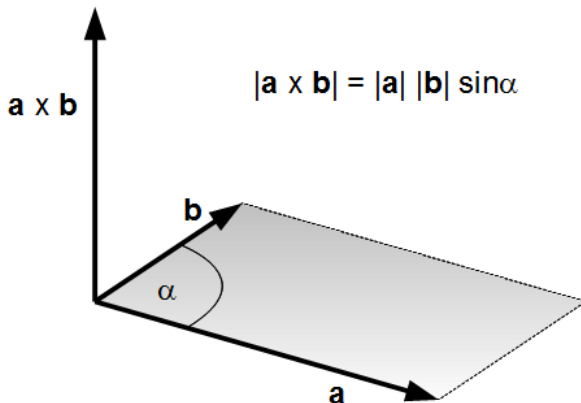
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ez kifejezhető úgy is, hogy

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha),$$

ahol α az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög.

Vektorok vektoriális szorzata – 3D



- ▶ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re is
- ▶ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobb sodrású rendszert alkot

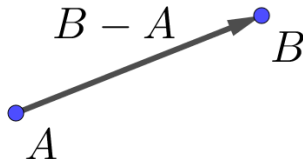
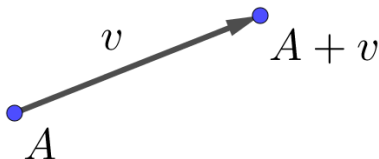
Vektorok vektoriális szorzata – 3D

A vektoriális szorzat determinánssal kifejezve:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pontok, vektorok

- ▶ Egy pont és egy vektor is a választott koordináta-rendszerbeli koordinátáinak megadásával definiálható. DE: figyeljünk az elvégezhető műveletekre!
- ▶ Műveletek pontok és vektorok között:
 - ▶ $\text{pont} + \text{vektor} = \text{pont}$ pont eltolása
 - ▶ $\text{pont} - \text{pont} = \text{vektor}$ különbségvektor
 - ▶ $\text{pont} + \text{pont}$ nincs értelmezve!



Pontok, vektorok

- ▶ A továbbiakban, ha két pontot veszünk, akkor feltesszük, hogy azok nem esnek egybe (tehát két *különböző* pontról beszélhetünk)
- ▶ Ugyanígy, három pontnál feltesszük, hogy nem esnek egy egyenesbe
- ▶ Ha egyeneseket, síkokat veszünk őket is *különbözőnek* tekintjük, illetve ha több síkot veszünk, azt is kizárjuk, hogy mind egyező állású legyen

Jelölés

- ▶ Pontok: $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3, \dots$
- ▶ Vektorok: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n = 2, 3, \dots$
 - ▶ spec.: $[\mathbf{v}]_0 \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amely egység hosszú, azaz $\|[\mathbf{v}]_0\|_2 = 1$.
- ▶ Egyenesek: $e, f, g, \dots$
- ▶ Síkok: $S, \dots$
- ▶ Mátrixok: $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Koordináta-rendszer

- ▶ A tér pontjainak egyértelmű leírására szám n-esek segítségével

$$\text{pl.: } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

- ▶ Lehetővé teszi a pontok számítógépen való tárolását
- ▶ Lehetővé teszi az algebrai és analitikus eszköztár felhasználását geometriai problémák megoldására
- ▶ Egy, a problémához jól illeszkedő koordináta-rendszerben a probléma leírása egyszerűbb lehet

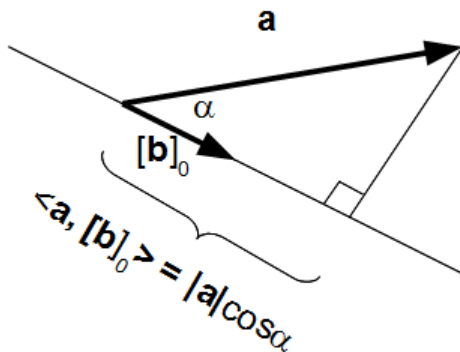
Descartes-féle, derékszögű koordináta-rendszer

- ▶ Descartes, 1637.: *értekezés a módszerről* (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)
- ▶ Legtöbbször ezzel találkozunk, ez a legegyszerűbb és legelterjedtebb megadási mód

Descartes koordináta-rendszer

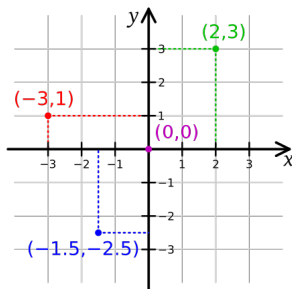
- ▶ Az euklidészi tér [sík] minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y, z) számhármast $[(x, y, z)]$ számpárt].
- ▶ A térben derékszögű koordináta-rendszert határoz meg egy kezdőpont (origó, $\mathbf{o}$), és egy ortonormált bázis: három egymásra páronként merőleges egységvektor: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ (utóbbiak az x, y, z tengelyek irányát adják meg).
- ▶ Ekkor egy $\mathbf{p}$ pont x, y, z koordinátái sorban az origóból a $\mathbf{p}$ -be mutató vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokra vett előjeles merőleges vetületével egyezik meg.
- ▶ *Emlékeztető:* az $\mathbf{a}$ vektor előjeles merőleges vetülete a $[\mathbf{b}]_0$ egységvektorra $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}]_0 \rangle = |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]_0)$

Előjeles merőleges vetület



Geometriai értelmezés

- Szemléletesebben: A $\mathbf{p}(a, b, c)$ az a pont, amit az origóból az x tengely mentén a egységet lépve, majd az y tengely mentén b egységet lépve, végül a z tengely mentén c egységet lépve kapunk.



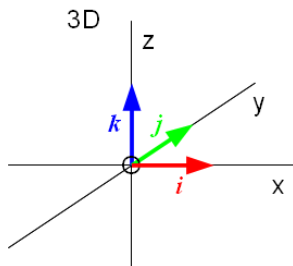
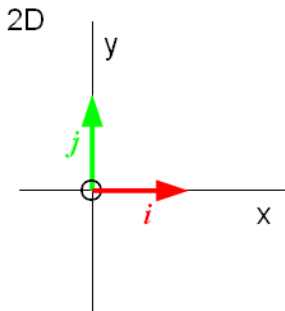
Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i, j, k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

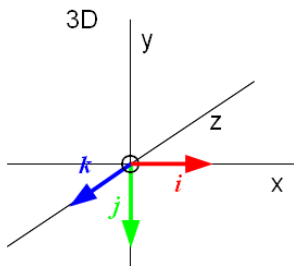
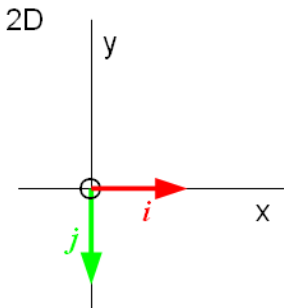
$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{o} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

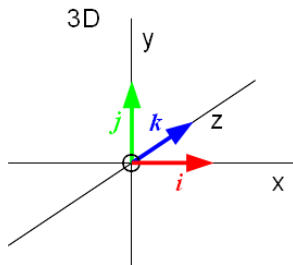
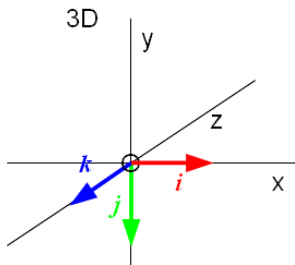
Sodrásirány – jobbsodrású rendszer



Sodrásirány – balsodrású rendszer



Sodrásirány – balsodrású rendszer

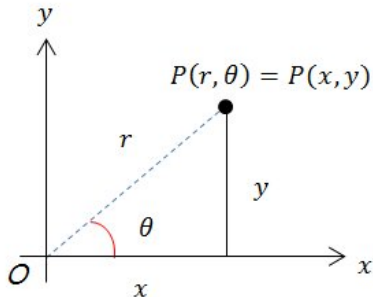
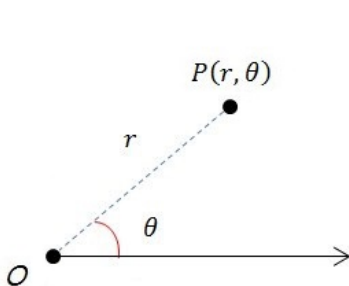


Távolság számítása

- ▶ Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$
- ▶ Egyrészt ez: lemérendő távolság – a fenti pedig a háromszög oldalaira emelt négyzetek lemerő területe
- ▶ Descartes-koordinátákkal: algebrai egyenlet, ami $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ismeretében kiszámítható
- ▶ $\rightarrow$ új alakzatok leírására is megnyílt a lehetőség
- ▶ Általánosan:
 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n : d = \sqrt{\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$
- ▶ V.ö.: vektor hossza: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- ▶ Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- ▶ Egy **p** pont helyét két adat azonosítja: (r, θ)
 - ▶ $r \geq 0$: a **p** pont **o**-tól vett távolsága
 - ▶ $\theta \in [0, 2\pi)$: az **o**-ból induló **p**-n átmenő félegyenes polártengellyel bezárt szöge



Konverziók

► Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$

► $x = r \cos \theta$

► $y = r \sin \theta$

► Descartes $\rightarrow$ polár: $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

► $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & x > 0 \wedge y < 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$
$$= \operatorname{atan2}(y, x)$$

Konverziók

- ▶ A fentiek csak akkor teljesülnek, amennyiben a Descartes origó és a polár referenciapont, illetve a Descartes x -tengely és a polártengely megegyezik. Egyéb esetben további számítások szükségesek.
- ▶ Mi van, ha $x = 0, y = 0$? Ilyenkor $r = 0$ mellett tetszőleges szöggel visszkapjuk az origót! Nem egyértelmű a polár szög, az $r = 0$ -át még azelőtt ellenőrizzük, hogy a fenti konverziós képleteket próbálnánk használni.

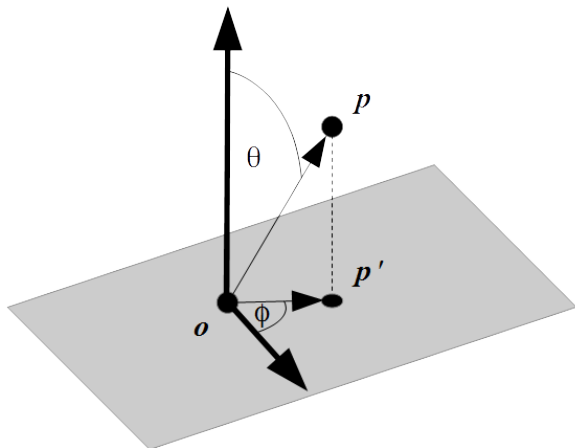
Megjegyzések

- ▶ Általában akkor használjuk, ha az ábrázolni kívánt dolgokhoz jól illeszkedik, pl. körmozgás
- ▶ Hátrányai: egyik PKR-ből a másikba áttérni költséges, deriváltak számítása költséges, ...

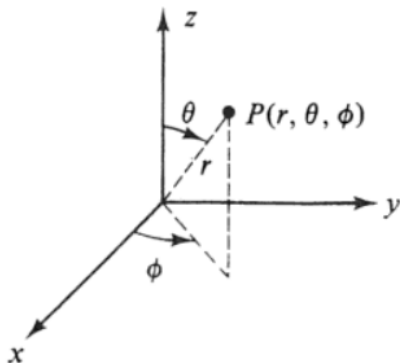
Gömbi koordináták

- ▶ Térbeli polár-koordináták; meghatározza egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges „Z tengely”
- ▶ Egy térbeli $\mathbf{p}$ pontot három adat reprezentál: (r, θ, ϕ)
 - ▶ (ϱ, ϕ) : a $\mathbf{p}$ pont alapsíkra vett vetületének polárkoordinátái
 - ▶ $\theta \in [0, \pi]$: az $\mathbf{o}$ -ból kiinduló és $\mathbf{p}$ -n áthaladó félegyenes Z tengellyel bezárt szöge
 - ▶ r : a $\mathbf{p}$ pont és az origó távolsága (ha $r = 0$ akkor ismét bármi lehet a két polárszög! Konverziók előtt ezt ellenőrizni kell)

Gömbi koordináták



Gömbi koordináták



Konverziók

- ▶ A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- ▶ Gömbi $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta$$

- ▶ Descartes $\rightarrow$ gömbi: $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(y, x),$$

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

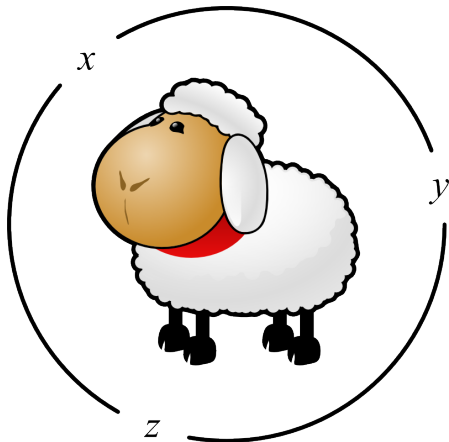
$$\theta = \arccos \frac{z}{r},$$

$$r \neq 0$$

Megjegyzés

- ▶ Hasznos például a földfelszín pontjainak azonosítására (de ott általában $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$).
- ▶ Gömb és ellipszoid parametrikus ábrázolásánál gömbi koordinátákat használunk

Baricentrikus koordináták – intuitív kép



Baricentrikus koordináták

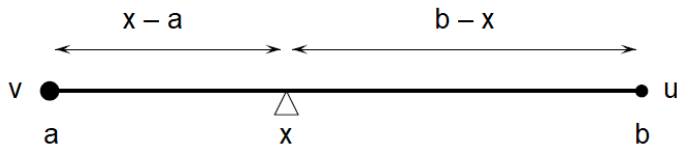
- ▶ August Ferdinand Möbius [1827]
- ▶ Motiváció: sokszor egy konkrét, véges része érdekes csak számunkra a térnek. Ennek a Descartes-félénél egy „kiegyensúlyozottabb” reprezentációját keressük.
- ▶ A baricentrikus koordináták nem függnek egy pont önkényes origónak választásától, helyette több pontra oszlik szét ez a felelősség

Motiváció: intervallumok



Milyen u , v súlyokat helyezünk a rúd végére, hogy kiegyensúlyozott legyen ha a háromszöggel jelzett pontnál emeljük fel?

Motiváció: intervallumok



- ▶ Akkor nem billen el, ha $(x - a)v = (b - x)u$, ahol x a háromszög pozíciója
- ▶ Az u, v -nek csak az arányát köti meg a fenti, tegyük fel a továbbiakban, hogy $u + v = 1$
- ▶ Ekkor a súlyok a következők kell, hogy legyenek:

$$u = \frac{x - a}{b - a}, v = \frac{b - x}{b - a}$$

Tömegközéppont

- ▶ Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- ▶ Legyen a síkban 3 pontunk és helyezzünk minden $\mathbf{p}_i$ pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor az $\mathbf{m}$ tömegközéppont:

$$M = m_0 + m_1 + m_2, \quad \mathbf{m} = \frac{m_0}{M} \cdot \mathbf{p}_0 + \frac{m_1}{M} \cdot \mathbf{p}_1 + \frac{m_2}{M} \cdot \mathbf{p}_2$$

- ▶ *Homogén jellegű* megadás: egy $h \neq 0$ számmal megszorozva a súlyokat is ugyanazt a tömegközéppontot kapjuk.

Baricentrikus koordináták

- Ha $\mathbb{E}^n$ -ben az $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ pontok kifeszítik a teret (azaz nem esnek egy $n - 1$ dimenziós altérbe), akkor a tér bármely $\mathbf{x}$ pontjához egyértelműen találhatóak $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ valós számok úgy, hogy

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{a}_i,$$

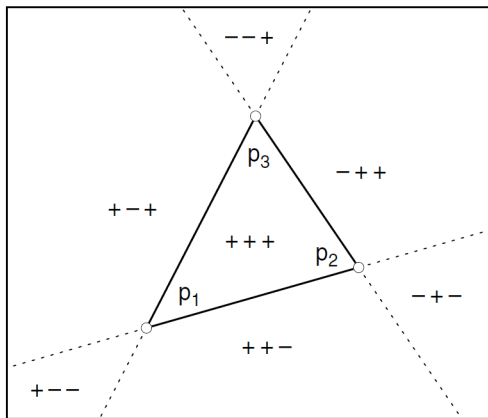
ahol a λ_i baricentrikus koordinátákra teljesül, hogy

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

Megjegyzés

- ▶ Síkban tehát 3 általános állású pont kell (olyanok, amelyek nem esnek sem egy egyenesbe, sem egy pontba), míg a térben 4 általános állású pont.
- ▶ Ha $\forall i$ -re $\lambda_i \geq 0$, akkor konvex kombinációról beszélünk és a pontok konvex burkába esnek a kombináció eredményei – azaz síkon a háromszögre, térben a tetraéderre.
- ▶ Az affin transzformációk nem változtatják meg a baricentrikus koordinátákat (lásd később).

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer



A $+/-$ jelek az adott síkrészre eső pontok baricentrikus koordinátáinak előjeleit mutatják.

Baricentrikus $\rightarrow$ Descartes konverzió

- ▶ Legyenek (u, v, w) egy pont baricentrikus koordinátái a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva.
- ▶ Ekkor az (u, v, w) -vel azonosított $\mathbf{x}(x, y)$ pont Descartes koordinátái $\mathbf{x} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3$, azaz

$$x = ux_1 + vx_2 + wx_3$$

$$y = uy_1 + vy_2 + wy_3$$

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer

- ▶ Legyen $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{vmatrix}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$
- ▶ A $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ mennyiség az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területének duplája (pozitív, ha óra járásával ellentétes irányban adottak a csúcspontok, különben negatív)
- ▶ Ha $\mathbb{E}^3$ -ban vagyunk: $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \langle (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}), \mathbf{n} \rangle$, ahol $\mathbf{n}$ a három pont síkjának egység hosszú normálisa.

Descartes $\rightarrow$ baricentrikus konverzió

- Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ pont baricentrikus koordinátái a következők lesznek a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva:

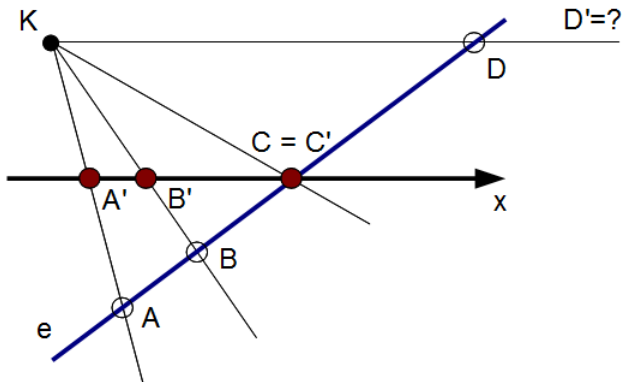
$$u = \frac{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}$$

$$v = \frac{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}, \mathbf{p}_3)}{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}$$

$$w = \frac{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{x})}{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}$$

Homogén koordináták – Motiváció

- Vetítsük egy e egyenes pontjait az x tengelyre egy k pontból!



Homogén koordináták – Motiváció

- ▶ A $\mathbf{d}'$ pont nincs az euklideszi síkon ($\mathbb{E}^2$), mivel a $\mathbf{k}$ -n és $\mathbf{d}$ -n áthaladó vetítősugár párhuzamos az x tengellyel
- ▶ Ötlet: bővítsük ki $\mathbb{E}^2$ -t!
- ▶ $\rightarrow$ tekintsük „pontnak” az egyenesek egyező állását (irányát) is, azaz minden egyenesnek legyen még egy „pontja”
- ▶ Ez a pont az egyenes *ideális pontja*.

Definíció – ideális pont

- ▶ Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:
 - ▶ Párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik („találkoznak a végtelenben” – festészetben/fotózásban ezt hívják „távlati pontnak”, angolul *vanishing point*)
 - ▶ Egy sík ideális pontjai egy egyenesen vannak, ez a *sík ideális egyenese*
 - ▶ Párhuzamos síkok ideális egyenese megegyezik
 - ▶ A tér ideális elemei (pontok, egyenesek) egy síkban vannak, ez a *tér ideális síkja*



Definíció és tulajdonságok – homogén tér

- ▶ Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
 - ▶ Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
 - ▶ Két egyenes meghatároz egy pontot (!) – metszéspont
 - ▶ ...
- ▶ Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal
 - ▶ Három pont meghatároz egy síkot
 - ▶ Három sík meghatároz egy pontot (!) – metszéspont
 - ▶ (HF: igaz az, hogy *bármely* (tetszőleges) három sík meghatároz egy pontot a projektív térben, ami mind a három síkon rajta van? Milyen esetekben nem?)
 - ▶ ...

Homogén koordináták

- ▶ Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*:

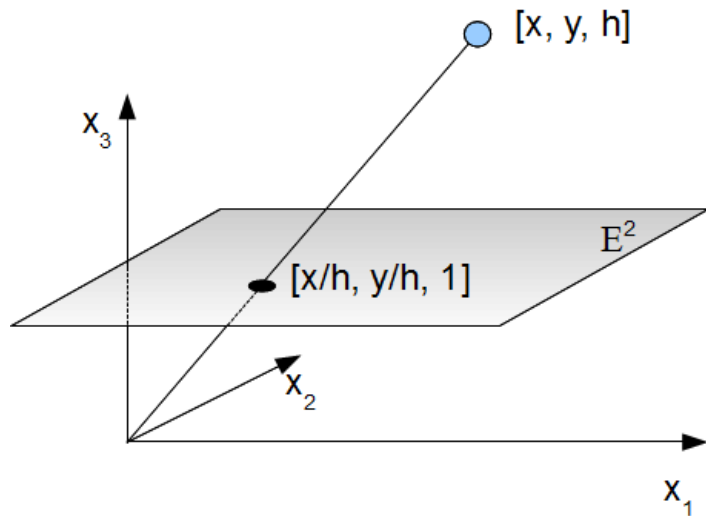
$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x, y, z) &\rightarrow [x, y, z, 1] \\ &\approx h[x, y, z, 1] \\ &= [hx, hy, hz, h], \quad h \neq 0\end{aligned}$$

- ▶ az összes $\mathbf{v} = [x, y, z]^T$ irányvektorhoz pedig:

$$\begin{aligned}[x, y, z] &\rightarrow [x, y, z, 0] \\ &\approx h[x, y, z, 0] \\ &= [hx, hy, hz, 0], \quad h \neq 0\end{aligned}$$

- ▶ Azaz egy homogén pont koordinátáit tetszőleges $h \neq 0$ számmal megszorozhatjuk és a kapott új koordináták ugyanazt a pontot/vektort ábrázolják.

- ▶ Ez a beágyazásnál ($\mathbb{E}^n$ beágyazása $\mathbb{R}^{n+1}$ -be) úgy mutatkozik meg, hogy a vetítő egyenesen található összes homogén pont ugyanazt az euklideszi pontot/vektort jelenti.

$\mathbb{E}^2$ beágyazása $\mathbb{R}^3$ -ba

Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- ▶ Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?
 - ▶ Ha $x_4 \neq 0$, akkor egy közönséges pontról van szó, aminek koordinátái homogén (vagy projektív) osztás után

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \approx \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1 \right] = \mathbf{p} \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4} \right)$$

- ▶ Ha $x_4 = 0$, de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ (=nem mind nulla), akkor egy ideális pontról van szó, az $[x_1, x_2, x_3]$ vektorral egyező állású egyenesekhez rendeltről.
- ▶ Ha $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, akkor nincs értelmezve.

Nevezetes homogén alakok

- ▶ Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:
 - ▶ $[0, 0, 0, c]$ az origó
 - ▶ $[c, 0, 0, 0]$ az x tengely ideális pontja
 - ▶ $[0, c, 0, 0]$ az y tengely ideális pontja
 - ▶ $[0, 0, c, 0]$ az z tengely ideális pontja

Tulajdonságok

- ▶ A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak
- ▶ Figyeljünk, hogy egyes tulajdonságok az euklideszi térből nem jönnek át:
 - ▶ Egy egyenes egy pontja nem osztja két részre az egyenest! De: két különböző pontja már két részre osztja
 - ▶ Egy síkot egy egyenese nem osztja két részre! De: két különböző egyenese már két részre osztja
 - ▶ Két pontot összekötő egyenes szakasz sem egyértelmű! (Az egyenes ideális pontja „összeragasztja” az egyenes két végét)